

UNIVERSIDAD SAN FRANCISCO DE QUITO

Colegio de Posgrados

**Implementación Computacional de Medidas de Concentración
y un Modelo de Equilibrio con Desviaciones para Análisis
Estructural de Mercados**

Juan Sebastián Araujo Dueñas
Carlos Jiménez, Ph.D., Director de Tesis

Tesis de grado presentada como requisito
para la obtención del título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Quito, mayo de 2015

Universidad San Francisco de Quito

Colegio de Posgrados

HOJA DE APROBACIÓN DE TESIS

**Implementación Computacional de Medidas de Concentración
y un Modelo de Equilibrio con Desviaciones para Análisis
Estructural de Mercados**

Juan Sebastián Araujo Dueñas

Carlos Jiménez, Ph.D.

Director de Tesis

.....

Sebastián Oleas, Ph.D.(c)

Miembro del Comité de Tesis

.....

Carlos Jiménez, Ph.D.

Director de Maestría en Matemática Aplicada y

Miembro del Comité de Tesis

.....

Santiago Gangotena, Ph.D.

Decano de Colegio de Ciencias e Ingeniería

.....

Victor Viteri, Ph.D.

Decano del Colegio de Posgrados

.....

Quito, mayo de 2015

©DERECHOS DE AUTOR

Por medio del presente documento certifico que he leído la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad San Francisco de Quito y estoy de acuerdo con su contenido, por lo que los derechos de propiedad intelectual del presente trabajo de investigación quedan sujetos a lo dispuesto en la Política.

Asimismo, autorizo a la USFQ para que realice la digitalización y publicación de este trabajo de investigación en el repositorio virtual, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Firma:.....

Nombre: Juan Sebastián Araujo Dueñas

C.I.: 1715201727

Fecha: Quito, mayo de 2015

*A Cayetana y Nicky,
mi manera de entender el infinito*

Resumen

En el presente trabajo se implementan a través de los sistemas computacionales R y Netlogo, algoritmos que permitan la estimación de medidas de concentración en mercados, así como un esquema de simulación unidimensional de agentes para evaluar desviaciones a la competencia perfecta por parte de operadores económicos. Para esto, en una primera parte se hace un estudio detallado de lo que son las medidas de concentración, y se describen formalmente los indicadores más utilizados en la literatura. Posteriormente, se desarrolla un modelo de equilibrio de mercado con desviaciones, estableciendo sus principales características y variaciones con respecto a las estructuras tradicionales de competencia perfecta, monopolio y competencia de Cournot. Es importante mencionar que la implementación propuesta busca convertirse en una herramienta para el análisis estructural de mercados, aplicable para estudios e investigaciones por parte de autoridades nacionales de competencia; y siendo el punto de partida para el desarrollo de software especializado en la materia.

Palabras clave: estructura de mercado, medidas de concentración, desviaciones a la competencia, simulación de agentes, distribuciones estadísticas.

Códigos JEL: C02, C14, C16, L10, L12.

Abstract

In this paper, algorithms for estimating market concentration measures, and a uni-dimensional simulation scheme, are implemented using the computational systems R and Netlogo. With this perspective, in the first section a detailed study of concentration measures is done, and the most used measures in the literature are formally described. Subsequently, a market equilibrium model with deviations is developed, establishing its main characteristics and variations compared to traditional market structures of perfect competition, monopoly, and Cournot competition. It is noteworthy that the implementation proposal seeks to become a tool for structural market analysis, applicable in studies and investigations performed by national antitrust authorities; being also the starting point for the development of specialized software in this topic.

Keywords: market structure, concentration measures, cooperation, competition deviations, agent simulation, statistic distributions.

JEL Codes: C02, C14, C16, L10, L12.

Índice

1. Introducción	11
2. Medidas de Concentración	13
2.1. Definición Axiomática de Medidas de Concentración	13
2.2. Principales Medidas de Concentración	16
2.2.1. Índice de Concentración k (C_k)	17
2.2.2. Índice Herfindahl - Hirschman (HHI)	18
2.2.3. Índice Rosenbluth (RI) e Índice Hall - Tideman (HTI)	19
2.2.4. Índice de Concentración Industrial Comprensivo (CCI)	22
2.2.5. Índice Hannah - Kay (HKI)	23
2.2.6. Índice de Concentración U (UI)	25
2.2.7. Índices de Hause (H_m y H_a)	26
2.3. Implementación de Medidas de Concentración en R	28
2.3.1. Función C_k	29
2.3.2. Función HHI	31
2.3.3. Función RI	33
2.3.4. Función CCI	36
2.3.5. Función HKI	37
2.3.6. Función UI	39
2.3.7. Función Hause	41
2.3.8. Interpretación de Resultados	43
3. Modelo de Equilibrio de Mercado con Desviaciones	45
3.1. Consideraciones Iniciales	45
3.1.1. Parámetros para un Modelo de Equilibrio de Mercado	45
3.1.2. Estructuras Comunes de Mercados	47
3.2. Definición de un Modelo de Equilibrio de Mercado con Desviaciones (EMD)	49
3.3. Variaciones al Modelo EMD	52
3.3.1. Existencia de Costos Fijos (Economías de Escala)	53
3.3.2. Costos Marginales Diferentes (Heterogeneidad en Costos)	54
3.4. Implementación del Modelo EMD en Netlogo	56
3.4.1. Definiciones	56
3.4.2. Parámetros Generales y Específicos de la Simulación	65
3.4.3. Resultados de la Simulación	70
3.4.4. Casos Ejemplificativos para Evaluar Implementación	73
3.4.5. Interpretación de Resultados	78
4. Conclusiones	79
Referencias	82
Anexos	84

Índice de figuras

1.	Curvas de concentración para ejemplo con función C_k	31
2.	Evolución del HHI para ejemplo con función HHI	33
3.	Curvas de Lorenz para ejemplo con función RI	35
4.	Evolución de CCI para ejemplo con función CCI	37
5.	Curvas de α -concentración para ejemplo con función HKI	39
6.	Curvas de iso-concentración para ejemplo con función UI	41
7.	Estructura básica de un CA	57
8.	Ciclo de Edgeworth a utilizar en la implementación del modelo EMD (Caso sin posición dominante)	62
9.	Ciclo de Edgeworth a utilizar en la implementación del modelo EMD (Caso con posición dominante)	62
10.	Esquema de procesamiento de parámetros en implementación	65
11.	Gráfica de evolución e histograma para n en mercado de cemento de construcción (Simulación 5)	75
12.	Gráfica de evolución e histograma para S_n en mercado de cemento de construcción (Simulación 5)	75
13.	Gráfica de evolución e histograma para n en mercado de transporte aéreo en rutas nacionales (Simulación 5)	76
14.	Gráfica de evolución e histograma para S_n en mercado de transporte aéreo en rutas nacionales (Simulación 5)	76
15.	Gráfica de evolución e histograma para n en mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg (Simulación 5)	78
16.	Gráfica de evolución e histograma para S_n en mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg (Simulación 5)	78
17.	Interfaz de parámetros para modelo EMD	110
18.	Interfaz de resultados para modelo EMD	111

Índice de cuadros

1.	Participaciones para ejercicio de implementación en R (%)	28
2.	Resumen de resultados para ejemplo con función C_k	30
3.	Intervalos de confianza para ejemplo con función C_k	30
4.	Resumen de resultados para ejemplo con función HHI	32
5.	Intervalos de confianza para ejemplo con función HHI	33
6.	Resumen de resultados para ejemplo con función RI	35
7.	Intervalos de confianza para ejemplo con función RI	35
8.	Resumen de resultados para ejemplo con función CCI	36
9.	Intervalos de confianza para ejemplo con función CCI	37
10.	Resumen de resultados para ejemplo con función HKI	38
11.	Intervalos de confianza para ejemplo con función HKI	39
12.	Resumen de resultados para ejemplo con función UI	40
13.	Intervalos de confianza para ejemplo con función UI	41
14.	Resumen de resultados para ejemplo con función Hause	43
15.	Intervalos de confianza para ejemplo con función Hause (multiplicativo)	43

16.	Intervalos de confianza para ejemplo con función Hause (aditivo)	43
17.	Ejemplos de reglas o configuraciones de CA	58
18.	Distribución y probabilidad de ocurrencia de reglas de CA probabilístico	59
19.	Ejemplo de Ciclo de Edgeworth	60
20.	Parámetros generales a usarse en los ejemplos	73
21.	Resultados de simulación en mercado de cemento para la construcción .	74
22.	Resultados de simulación en mercado de transporte aéreo en rutas na- cionales	76
23.	Resultados de simulación en mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg	77

1. Introducción

Dentro del estudio de la competencia económica en los mercados, el análisis estructural es de gran relevancia dado que permite una comprensión exhaustiva de las características de oferta y demanda de dichos mercados; lo que a su vez ayuda a evaluar de mejor manera su comportamiento y rendimiento tanto a nivel individual -de operadores económicos que proveen y consumen bienes-, como agregado.

Sobre esto, se ha discutido ampliamente respecto al paradigma Estructura, Conducta y Desempeño (SCP, por sus siglas en inglés) desarrollado en un inicio por Chamberlin[6] y Robinson[30], y posteriormente profundizado por Bain[1]. El referido esquema establece que el entorno competitivo de un mercado (vr. gr. tecnología disponible, ubicación geográfica, temporalidad) determina su estructura (vr.gr. número de competidores, barreras a la entrada, diferenciación de productos); la que a su vez influye directamente en las conductas observadas de las empresas competidoras (vr. gr. publicidad, precios, I+D, tácticas legales, cooperación), y finalmente, en su rendimiento económico en el corto y largo plazo (vr. gr. eficiencia, calidad, retornos).

Como parte del análisis estructural antes citado, las medidas de concentración son un elemento fundamental de uso extendido entre las autoridades de competencia en el mundo. Es así que por ejemplo, la Comisión Federal de Comercio de los Estados Unidos (FTC, por sus siglas en inglés), en su documento *Horizontal Merger Guidelines* del año 2010, recomienda el uso del índice de Herfindahl – Hirschman (HHI), descrito más adelante, para el estudio de fusiones y otras operaciones de cambio permanente de control entre empresas[12]. Casos similares se pueden encontrar en lineamientos y normativa de otros países como España, México, Colombia y Chile.

Adicional a lo anterior, estructuras que pretenden explicar el funcionamiento de mercados, tales como la competencia perfecta, el monopolio, los oligopolios o la competencia monopolística, son tópicos que dentro del estudio de la organización industrial sientan las bases del análisis empresarial. Es por esto que en la literatura, siempre se las presenta a modo de fundamento teórico y punto de partida. Vale mencionar algu-

nos casos como Carlton y Perloff[5], quienes hacen mención a estas estructuras en la primera parte de su libro *Modern Industrial Organization*, indicando que éstas son las formas tradicionales en las que las empresas y los mercados se organizan y comportan. Tirole[32] por su parte, dedica un capítulo entero en su libro *The Theory of Industrial Organization* a evaluar los monopolios y contrastarlos con la competencia perfecta.

En atención a estos antecedentes, el presente documento tiene por objeto el realizar una aproximación al análisis estructural de mercados a través de las medidas de concentración y las estructuras de mercado previamente referidas. En cuanto a las primeras, la sección a continuación las define formalmente y realiza una implementación computacional en R¹. Sobre las segundas, en la parte tercera se las expone en mayor detalle y se desarrolla un nuevo modelo de equilibrio de mercado a ser implementado con Netlogo² mediante herramientas de simulación unidimensional. Vale mencionar que en ambos apartados, se aplican las implementaciones en casos reales o hipotéticos de mercados.

Los resultados y herramientas obtenidos en este documento pretenden aportar en el entendimiento de cómo la estructura de los mercados determina el comportamiento de los operadores económicos partícipes, siendo de utilidad para la investigación académica, así como para la toma de decisiones de autoridades nacionales de competencia en el marco de sus estudios técnicos. De igual manera, se busca sentar las bases matemáticas y computacionales para el desarrollo de sistemas de inteligencia informática que realicen análisis estructural de mercado, facilitando así la labor de investigadores y funcionarios inmersos en la práctica de la competencia económica.

¹R es un lenguaje y entorno de programación libre para análisis gráfico y estadístico, que puede descargarse en <http://cran.r-project.org>.

²Netlogo es un entorno de programación libre para modelos multi – agente, que puede descargarse en <http://ccl.northwestern.edu>.

2. Medidas de Concentración

2.1. Definición Axiomática de Medidas de Concentración

Por concentración se entiende a aquella medida de aglomeración de un conjunto de datos. Representa por tanto una característica estructural del referido conjunto, así como son la media, la varianza, el sesgo o la curtosis. Al respecto, los trabajos de Hall y Tideman[13], y Hannah y Kay[14] establecen las condiciones axiomáticas que las medidas de concentración deberían cumplir. Las primeras, que se exponen a continuación, tratan preferentemente con aspectos matemáticos de dichas medidas.

1. La concentración es una medida unidimensional. Esto es, mide la aglomeración de solamente un conjunto de datos.
2. La concentración depende del valor relativo, y no del absoluto, de los datos que conforman el conjunto.
3. La medida de concentración debe variar ante cambios que se presenten en el valor relativo de los datos que conforman el conjunto, de manera que aumente cuando el mayor valor crezca a expensas de otros menores.
4. Si se divide cada uno de los datos que componen el conjunto en r partes iguales, de modo que la cardinalidad de dicho conjunto se incremente por este factor, entonces la nueva concentración será $1/r$ veces la concentración inicial.
5. Cuando la cardinalidad del conjunto es N y los datos son de igual valor, entonces la medida de concentración debe ser inversamente proporcional a N .
6. La concentración debe estar en el rango $[0, 1]$.

Por su parte, Hannah y Kay establecen propiedades más enfocadas al campo de la organización industrial pero que son igualmente generalizables. En efecto, indican que para conjuntos de datos definidos como las agrupaciones de participaciones o cuotas en un mercado, se cumple que:

1. Un incremento en el valor relativo acumulado de cualquier dato que conforma el conjunto ordenado de forma decreciente, incrementa la concentración.
2. La transferencia de valor relativo entre datos que conforman el conjunto modifican la concentración.³
3. Si un dato nuevo que se incorpore al conjunto es menor al promedio de los datos previamente registrados, entonces la concentración disminuirá, y si es mayor sucede lo contrario.
4. Si dos o más datos dentro de un conjunto se suman formando uno solo, entonces la concentración se incrementará.
5. La diversidad en las preferencias de los individuos por los datos en el conjunto disminuyen la concentración. Esto es, la heterogeneidad es inversamente proporcional a la concentración.
6. El efecto sobre la concentración será mayor en la medida que la magnitud del dato sea igualmente mayor.
7. La influencia de factores aleatorios en la magnitud de los datos que conforman el conjunto tienden a incrementar la concentración.⁴

La complejidad generada para el cumplimiento de toda la axiomática previamente descrita, motivó a que Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin[10] establezcan que en general, una medida de concentración \mathcal{M}_C es una función definida por

$$\mathcal{M}_C : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1}^N \mapsto \mathcal{M}_C(\mathbf{X})$$

de tal modo que

³Este axioma tiene correspondencia con el axioma 3 de Hall – Tideman.

⁴El conjunto por lo tanto cumple con la ley de Gibrat.

$$\mathcal{M}_C(\mathbf{X}) = \varphi(N, D) \quad \varphi_N \leq 0 \quad \varphi_D \geq 0 \quad \forall N, D$$

donde D es una medida de equidad o dispersión vinculada al conjunto \mathbf{X} , y que es S-convexa⁵. Nótese que esta definición permite el cumplimiento de los axiomas de Hall – Tideman, con excepción del cuarto y el sexto⁶; así como de los axiomas 1, 2, 3 y 4 de Hannah – Kay⁷.

Visto esto, una definición adecuada de \mathcal{M}_C ha sido un tema de gran debate en la literatura económica que ha derivado en el surgimiento de diversas funciones. Al respecto, Marfels[23] hace la siguiente generalización:

$$\mathcal{M}_C = \varphi \left(\sum_{x_i \in \mathbf{X}^*} \rho_{x_i} x_i \right), \mathbf{X}^* \subseteq \mathbf{X} \quad (1)$$

donde ρ_{x_i} es un peso asignado al valor $x_i \in \mathbf{X}$; y establece cuatro categorías de medidas de concentración en función del mencionado peso:

- En la primera categoría se incluyen las medidas de concentración con $\rho_{x_i} = 1, \forall x_i \in \mathbf{X}^*$ y $\rho_{x_i} = 0, \forall x_i \notin \mathbf{X}^*$.
- En la segunda categoría se incluyen las medidas de concentración con $\rho_{x_i} = x_i, x_i \in \mathbf{X}$.
- En la tercera categoría se incluyen las medidas de concentración con $\rho_{x_i} = i, \forall x_i \in \mathbf{X}$.
- Finalmente, la cuarta categoría comprende aquellas medidas de concentración con $\rho_{x_i} = -\log_a x_i, \forall x_i \in \mathbf{X}, a \in \mathbb{R}^+$.

Dados estos antecedentes, sea el conjunto

⁵S-convexa implica que $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, x \succ y \Rightarrow D(x) > D(y)$.

⁶Para que estos axiomas se cumplan se deberán dar definiciones adicionales en cuanto a la estructura de $\varphi(N, D)$ y su rango.

⁷De conformidad con lo descrito en Latreille y Mackley (2003), son los cuatro primeros axiomas de Hannah – Kay los más importantes.

$$X = \left\{ S_i : 0 \leq S_i \leq 1, \sum_{i \in N} S_i = 1, \forall i \in N = \{1, \dots, N\} \right\} \quad (2)$$

Se cumple asimismo que para todo i , $S_i \geq S_{i+1}$.

Sea también la variable aleatoria S que toma cualquier valor $S_i \in \mathbf{X}$, y la cual mantiene las siguientes propiedades de esperanza, varianza y densidad respectivamente:

$$\mathbb{E}(S) = \mu_S = \frac{1}{N}$$

$$\mathbb{V}(S) = \sigma_S^2 = m_2^S - \frac{1}{N^2}$$

$$\mathbb{P}(S = S_i) = f_S(S_i) = \frac{1}{N}$$

donde m_k^A es el k -ésimo momento de la variable aleatoria A .

Al respecto, si la distribución de S está dada tal que

$$S \sim \left(\mu_S = \frac{1}{N}, \sigma_S^2 = 0 \right) \quad (3)$$

se cumple que para todo i , $S_i = 1/N$. A este caso se le llamará situación ideal u homogénea de la variable S , considerando que todos los elementos S_i tienen un mismo valor dentro del conjunto \mathbf{X} . Adicionalmente, si $N = 1$ y existe homogeneidad, se dirá que S está en una situación unitaria.

A continuación entonces, se exponen y analizan las medidas de concentración que permiten tener un conocimiento más preciso de las características estructurales del conjunto \mathbf{X} y la variable aleatoria S .

2.2. Principales Medidas de Concentración

Como ya se mencionó, mucho se ha discutido sobre la validez de una u otra medida de concentración a la luz de lo expuesto por la axiomática de Hannah y Kay, y Hall y Tideman. Al respecto, el índice de Concentración k o el HHI, que se presentan en este apartado, han sido reconocidos frecuentemente como los de mayor valía por su simpli-

cidad y su capacidad de cumplir con varios de los axiomas presentados en el apartado anterior. Sin embargo, el universo de medidas que cumplen total o parcialmente con dicha axiomática, es mucho más extenso, pudiendo aportar con mayor información relacionada a las características del conjunto \mathbf{X} .

Por lo tanto, en los siguientes puntos se hace una presentación exhaustiva de varias medidas de concentración comúnmente halladas en la literatura económica. Se presenta asimismo el concepto de equivalente numérico y su relación con cada una de medidas mencionadas. De igual manera, se evalúa si estos estadísticos cumplen con la definición dada por Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin.

2.2.1. Índice de Concentración k (C_k)

El índice C_k , donde $k \leq N$, se encasilla en la primera categoría de Marfels y tiene la forma

$$C_k = \sum_{i=1}^k S_i \quad (4)$$

Destaca entonces la simplicidad del índice, puesto que consiste únicamente en la suma de los k primeros elementos del conjunto \mathbf{X} . Desarrollando esta expresión se obtiene que

$$C_k = 1 - (N - k)m_1^{S_{k+1}}$$

donde $m_1^{S_{k+1}}$ corresponde al primer momento de variable S_{k+1} , cuyo conjunto de posibles valores se define por $\mathbf{X}_{k+1} = S_i \in \mathbf{X} : S_i \leq S_k$.

Por otra parte, la derivada con respecto a N del indicador evidencia que hay una proporcionalidad inversa entre estas variables, puesto que $\partial C_k / \partial N = -m_1^{S_{k+1}} < 0$.

Complementario a esto, una mayor dispersión parece conducir asimismo a un mayor índice de concentración. En efecto, partiendo de la definición de varianza, de modo que $m_1^{S_{k+1}} = \sqrt{m_2^{S_{k+1}} - \sigma_{S_{k+1}}^2}$, se tiene que $\partial C_k / \partial \sigma_{S_{k+1}}^2 = (N - k) / 2m_1^{S_{k+1}} \geq 0$. Vale recalcar sin embargo, que para afirmar lo anterior se debe asumir que $\sigma_{S_{k+1}}^2 = \sigma_S^2$, o bien, que

el primero es un estimador insesgado del segundo. Dando por sentado este supuesto, es posible afirmar que para esta medida se cumple la definición de Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin.

Adicionalmente, a partir de este indicador surge la denominada curva de concentración $\mathcal{C}(k)$, la cual tiene un dominio $[0, N]$ y se denota como sigue

$$\mathcal{C}(k) : [0, N] \rightarrow [0, 1]$$

$$k \mapsto \mathcal{C}(k) = \begin{cases} C_k & N \geq k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \quad (5)$$

La principal utilidad de $\mathcal{C}(k)$ radica en que permite visualizar gráficamente el concepto de concentración. De hecho, gracias a esta curva, el primer axioma de Hannah y Kay puede replantearse como sigue: *Cualquier conjunto de datos cuya curva de concentración sea mayor o igual en cualquier punto a la curva de otro conjunto, tendrá una concentración mayor o igual a aquella del segundo conjunto.*

Por otra parte, si S se encuentra en situación ideal, se tiene que $C_{k,ideal} = k/N$; y en situación unitaria la medida es $C_{k,unitario} = 1$. Por tanto, se cumple que para cualquier conjunto \mathbf{X} , el indicador analizado estará acotado por $k/N \leq C_k \leq 1$.

Finalmente y luego de calcular el $C_{k,ideal}$, es posible introducir el concepto de equivalente numérico n_e , que se interpreta como aquel valor $n_e \leq N$, tal que $n_e = k/C_k$. Esto es, el equivalente numérico es aquel número que representa la cardinalidad de un conjunto \mathbf{X}^* , con variable aleatoria correspondiente S^* en situación ideal, cuyo valor de concentración es igual a aquel obtenido para el conjunto \mathbf{X} .

2.2.2. Índice Herfindahl - Hirschman (HHI)

El índice HHI pertenece a la segunda categoría de Marfels, y fue desarrollando de forma independiente por Hirschman[18] y Herfindahl[17]. Tiene la forma

$$HHI = \sum_{i=1}^N S_i^2 \quad (6)$$

Desarrollando esta expresión se obtiene que $HHI = Nm_2^S$; y como se vio previamente que $\sigma_S^2 = m_2^S - 1/N^2$ y $\mu_S = 1/N$, se puede también calcular el HHI con la siguiente igualdad

$$HHI = N\sigma_S^2 + \mu_S$$

Derivando con respecto a N , se tiene que $\partial HHI / \partial N = \sigma_S^2 - \mu_S^2$. Lo expuesto implica que el HHI es inversamente proporcional a N si y solamente si la dispersión de la variable aleatoria S es suficientemente pequeña con respecto a su media. Adicionalmente, es evidente que la medida es proporcional a la dispersión, visto que $\partial HHI / \partial \sigma_S^2 = N > 0$. Dados estos resultados, y suponiendo una razón $\sigma_S / \mu_S < 1$, es posible afirmar que para esta medida se cumple satisfactoriamente la definición de Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin.

Ahora bien, si S se encuentra en su situación ideal se tiene que $HHI_{ideal} = 1/N$; y en situación unitaria el índice es $HHI_{unitario} = 1$. Por tanto, se cumple que para cualquier variable aleatoria S , el indicador analizado está acotado por $1/N \leq HHI \leq 1$.

Finalmente, derivando el equivalente numérico para el HHI de la misma forma que en la medida anterior, se obtiene que $n_e = 1/HHI$.

2.2.3. Índice Rosenbluth (RI) e Índice Hall - Tideman (HTI)

El índice RI creado por Rosenbluth[31] tiene la forma

$$RI = \frac{1}{2C} \quad (7)$$

donde $C = N - \int_0^N \mathcal{C}(k)dk$. En vista de esto, el RI pertenece a la primera categoría de Marfels y busca cuantificar los efectos acumulados en la concentración correspondientes a cada S_i . Por su parte, el índice HTI corresponde a la tercera categoría de Marfels, y

fue desarrollando por Hall y Tideman[13], quedando definido por

$$HTI = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^N iS_i - 1} \quad (8)$$

Las dos medidas antes mencionadas son semejantes. Para demostrarlo, hay que tomar en cuenta que la regla uniforme de los trapecios, como aproximación numérica de la integración, establece que para un número cualquiera $h \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\int_a^b g(x)dx \approx \frac{b-a}{2h} \sum_{j=0}^{h-1} (g(x_{j+1}) + g(x_j))$$

donde $x_j = a + j(b-a)/h$. Aplicando esta regla a la expresión C , con $h = N$ se obtiene que

$$C = N - \int_0^N \mathcal{C}(k)dk \approx N - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (\mathcal{C}(j+1) + \mathcal{C}(j)) = \sum_{i=1}^N iS_i - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, es fácil comprobar que $RI \approx HTI$.

Para evaluar cómo influye N en estas medidas, se procede con el cálculo de la derivada $\partial RI / \partial N = -(1 - \mathcal{C}(k)) / 2C^2 \leq 0$; y para el HTI $\partial HTI / \partial N = -2S_N / (2 \sum_{i=1}^N iS_i - 1)^2 < 0$. Por lo tanto, se puede afirmar que ambos indicadores son inversamente proporcionales a N .

Ahora bien, a fin de conocer el comportamiento de estos índices con relación a la dispersión de S , es conveniente considerar el Coeficiente de Gini como medida de inequidad, y como aproximación a la dispersión; que surge de la Curva de Lorenz $L(x)$ definida por

$$L(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto L(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{xN} S_{N+1-i} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (9)$$

donde x toma la forma $x = t/N$, $t \in \{1, \dots, N\}$. Entonces, el Coeficiente de Gini G se define por la igualdad $G = 1 - 2 \int_0^1 L(x)dx$; lo cual equivale a la razón dada por el área comprendida entre la función identidad $y(x) = x$ y la Curva de Lorenz, sobre la misma función identidad en el intervalo $[0, 1]$.

Complementando esto, dadas las curvas $L(x)$ y $\mathcal{C}(k)$ se cumple necesariamente que

$$C = N - \int_0^N \mathcal{C}(k)dk = N \int_0^1 L(x)dx$$

Para demostrar esto, nótese que por definición

$$\sum_{i=1}^t S_{N+1-i} = 1 - \sum_{i=1}^{N-t} S_i \Rightarrow L\left(\frac{t}{N}\right) = 1 - \mathcal{C}(N-t)$$

Vale también recordar que $\mathcal{C}(0) = L(0) = 0$, por lo que dada la igualdad anterior, se cumple asimismo que

$$\int_0^N L\left(\frac{t}{N}\right) dt = N - \int_0^N \mathcal{C}(k)dk$$

Aplicando el método de sustitución en la integral del lado izquierdo tal que $x = t/N$, se obtiene la expresión a demostrar.

Incorporando entonces la igualdad que vincula la Curva de Concentración y la Curva de Lorenz en la fórmula para el cálculo del G , se tiene que

$$G = 1 - \frac{2C}{N} \Rightarrow C = \frac{N(1-G)}{2}$$

y por tanto

$$RI = \frac{1}{N(1-G)} \quad (10)$$

Como consecuencia, la derivada del RI con respecto al G es $\partial RI / \partial G = N^{-1}(1-G)^{-2} \geq 0$. Se puede concluir entonces que tanto el RI como el HTI⁸, son proporcionales al nivel de inequidad de la variable S , y consecuentemente cumplen la definición de

⁸Es pertinente asumir que dada la semejanza antes demostrada, $RI \propto G \Leftrightarrow HTI \propto G$.

Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin.

Ahora bien, si S se encuentra en su situación ideal, el RI y el HTI quedan establecidos como $RI_{ideal} = HTI_{ideal} = 1/N$; y si se encuentra en situación unitaria los valores de las medidas son $RI_{unitario} = HTI_{unitario} = 1$. Por consiguiente, es factible indicar que para cualquier variable aleatoria S , los indicadores analizados están acotados por $1/N \leq RI, HTI \leq 1$.

Finalmente, extrayendo el equivalente numérico para el HTI y el RI de la misma forma que en el caso anterior, se obtiene que

$$n_{e,RI} = \frac{1}{RI} \quad n_{e,HTI} = \frac{1}{HTI}$$

2.2.4. Índice de Concentración Industrial Comprensivo (CCI)

El índice CCI de Horvath[19] se posiciona en la segunda categoría de Marfels y tiene la forma

$$CCI = S_1 + \sum_{i=2}^N S_i^2(2 - S_i) \quad (11)$$

Nótese que de acuerdo a este índice, la concentración se explica por las distancias entre los valores S_i al igual que el HHI; y también por el valor del elemento de mayor magnitud del conjunto \mathbf{X} . Desarrollando esta expresión se obtiene que

$$CCI = A_1 + (2N - 3)\sigma_S^2 - N\gamma_S (\sigma_S^2)^{3/2} + \frac{2N - 1}{N^2}$$

donde γ_S es el coeficiente de asimetría de Fisher de la variable S , y $A_1 = S_1 - 2S_1^2 + S_1^3$.

Derivando con respecto a N se tiene que $\partial CCI / \partial N = (2 - \gamma_S \sigma_S) \sigma_S^2 - 2(\mu_S^2 - \mu_S^3)$, lo que implica que el indicador es inversamente proporcional a N al cumplirse que $2 \leq \gamma_S \sigma_S$, o bien si, $\sigma_S^2 / \mu_S^2 < 2(1 - \mu_S) / (2 - \gamma_S \sigma_S)$ para $\gamma_S \sigma_S < 2$. Esto es, la proporcionalidad inversa se cumple si la asimetría de la distribución y la varianza son significativamente grandes; o en caso de que esto no se cumpla, si la varianza es pequeña con respecto a la media.

En cuando a la relación del índice con la dispersión se evidencia que $\partial CCI / \partial \sigma_S^2 = (4N - 6 - 3N\gamma_S(\sigma_S^2)^{1/2})/2$. Entonces se cumple la proporcionalidad directa entre el CCI y la dispersión del conjunto S si y solamente si $N > 6/(4 - 3\gamma_S\sigma_S)$. De lo anterior se concluye que para que el CCI cumpla satisfactoriamente con las condiciones de Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin, se requiere la convergencia de varias condiciones respecto a cardinalidad, asimetría y dispersión de S .

Por otra parte, si S se encuentra en situación ideal se tiene que $CCI_{ideal} = (1/N - 1)^3 + 1$; y si está en situación unitaria $CCI_{unitario} = 1$. Por consiguiente, se puede probar que para cualquier variable aleatoria S , el indicador está acotado por $(1/N - 1)^3 + 1 \leq CCI \leq 1$.

Finalmente, extrayendo el equivalente numérico para el CCI, se obtiene que $n_e = (1 - (1 - CCI)^{1/3})^{-1}$.

2.2.5. Índice Hannah - Kay (HKI)

El HKI desarrollado por Hannah y Kay[14] puede entenderse como una generalización del HHI antes analizado. Por lo tanto pertenece a la segunda categoría de Marfels, y tiene la forma

$$HKI = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N S_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} & \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ \prod_{i=1}^N S_i^{S_i} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (12)$$

donde α es un parámetro adicional dentro de la medida de concentración que mide la elasticidad a priori de la concentración, frente a variaciones en N y a cambios en valores de los elementos de \mathbf{X} .

Si $\alpha = 1$, y se aplica logaritmos en ambos lados del HKI se tiene que $HKI = e^{-E}$. Es decir, el HKI en este caso particular es también una función de la medida de entropía $E = -\sum_{i=1}^N S_i \log S_i$ de la variable S .⁹

A fin de evaluar otras propiedades del HKI, es conveniente demostrar que para valores enteros positivos de α diferentes de 1, y asumiendo los k-ésimos momentos

⁹De hecho, la medida de entropía es considerada como una medida de concentración en la literatura.

centrales de S , κ_k^S , con $\kappa_0^S = 1$, se cumple que

$$HKI = \left(\sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} N^{1-j} \kappa_{\alpha-j}^S \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (13)$$

Para la mencionada demostración se debe considerar el teorema de Newton para binomios de números reales a una potencia entera, el cual indica que para $a, b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{N}$, se cumple que $(a + b)^c = \sum_{j=0}^c \binom{c}{j} a^{c-j} b^j$. Si se opera el término $\sum_{i=1}^N S_i^\alpha$ contenido en la fórmula del HKI para $\alpha > 0$ y $\alpha \neq 1$, se obtiene que $\sum_{i=1}^N S_i^\alpha = \sum_{i=1}^N ((S_i - \mu_S) + \mu_S)^\alpha$, y aplicando el referido teorema restringiendo a valores enteros de α

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N S_i^\alpha &\approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} (S_i - \mu_S)^{\alpha-j} \mu_S^j = \sum_{j=0}^{\alpha} \left(\binom{\alpha}{j} \mu_S^j \sum_{i=1}^N (S_i - \mu_S)^{\alpha-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} \mu_S^j N \kappa_{\alpha-j}^S = \sum_{j=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{j} N^{1-j} \kappa_{\alpha-j}^S \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad antes mencionada.

Visto esto, es fácil comprobar que si $\alpha \rightarrow 0$ entonces $HKI \rightarrow 1/N$. Esto es, si la concentración es completamente inelástica frente a variaciones en N , entonces la variable S se encuentra próxima a una situación ideal. Adicionalmente, se puede verificar que si $\alpha \rightarrow \infty$ se cumple que $HKI \rightarrow S_1$, tal y como sigue

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} HKI &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N S_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(S_1^\alpha + \sum_{i=2}^N S_i^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_1^{\alpha/(\alpha-1)} \left(1 + \sum_{i=2}^N \left(\frac{S_i}{S_1} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = S_1 (1 + 0)^0 = S_1 \end{aligned}$$

lo cual implica que cuando la concentración es completamente elástica con respecto a N , la misma puede ser explicada solamente con la participación del mayor valor del conjunto \mathbf{X} , es decir, este número contiene toda la información relevante respecto a la

aglomeración del conjunto.

Por otra parte, derivando al indicador con respecto a N se obtiene que $\partial HKI / \partial N \approx HKI((\alpha - 1)Nm_\alpha^S)^{-1}(\sum_{j=0}^{\alpha}(1-j)\binom{\alpha}{j}N^{-j}\kappa_{\alpha-j}^S)$. Entonces, el HKI es inversamente proporcional a N sí para $\alpha \geq 2$, se cumple que $\sum_{j=2}^{\alpha}(j-1)\binom{\alpha}{j}N^{-j}\kappa_{\alpha-j}^S > \kappa_{\alpha}^S$.

Derivando ahora el índice con respecto a $\kappa_2^S = \sigma_S^2$, se tiene que

$$\partial HKI / \partial \kappa_2 \approx \alpha HKI / (2N^{\alpha-2}m_\alpha^S) > 0$$

De lo anterior se concluye que para que el HKI cumpla satisfactoriamente con las condiciones de Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin, es necesario que los momentos centrales de menor grado que α , sean suficientemente grandes con relación a κ_α^S .

Ahora bien, si S se encuentra en situación ideal, se tiene que $HKI_{ideal} = 1/N \forall \alpha$. Por su parte, si S se encuentra en situación unitaria, es posible evidenciar que $HKI_{unitario} = 1 \forall \alpha$. Por consiguiente, considerando los posibles valores de α , se cumple que para cualquier variable aleatoria S , el indicador está acotado por $1/N \leq HKI \leq S_1$.

En cuanto al equivalente numérico se obtiene que este es $n_e = 1/HKI$.

2.2.6. Índice de Concentración U (UI)

El UI fue propuesto por Davies[8], y responde a la necesidad de permitir al investigador asignar adecuadamente los pesos a los componentes de dispersión y cardinalidad relacionados al conjunto \mathbb{X} . Tiene por consiguiente la forma

$$UI = \frac{I^z}{N} \quad z \geq 0 \quad (14)$$

donde I es una medida de inequidad o dispersión de la variable aleatoria S . Al respecto, la medida de inequidad recomendada por Davies es $I = CV_S^2 + 1$, donde CV_S es el coeficiente de variación de S que mide el nivel de dispersión como una proporción de la media. En consecuencia de esto, se cumple que el índice pertenece a la segunda categoría de Marfels.¹⁰

¹⁰De lo anterior, es fácil verificar que $HHI = UI_{z=1} = (CV_S^2 + 1)/N$.

Se deduce directamente de la expresión anterior que $UI \propto \sigma_S^2$; y calculando la derivada con respecto a N , se obtiene $\partial UI / \partial N = UI(2z\sigma_S^2 / HHI - \mu_S)$. Esto implica que los criterios de Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin se cumplen siempre que $z < 1/2$, o caso contrario, si $\sigma_S^2 / \mu_S^2 < (2z - 1)^{-1}$.

Si la variable S se encuentra en situación ideal entonces $UI_{ideal} = 1/N$; y en situación unitaria el índice es $UI_{unitario} = 1$. Por lo tanto, el UI se encuentra acotado de la siguiente manera en función del valor asignado a z : $1/N \leq UI < \infty$. En cuanto a esto, una particularidad del indicador radica en el hecho que pueden existir conjuntos más concentrados que el unitario, dado el nivel de dispersión que en ellos exista, y el peso que se dé a esta condición del conjunto.

Adicionalmente, el equivalente numérico del índice es $n_e = 1/UI$.

Otra característica importante que surge del UI se refiere a la denominada curva de iso – concentración $\mathcal{I}(N)$, la cual se deriva como sigue

$$UI = \frac{(CV_S^2 + 1)^z}{N} = \frac{(N^2\sigma_S^2 + 1)^z}{N} \Rightarrow \sigma_S^2 = \frac{(NUI)^{1/z} - 1}{N^2}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{I}(N) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$N \mapsto \mathcal{I}(N) = \frac{(NUI)^{1/z} - 1}{N^2} \quad (15)$$

2.2.7. Índices de Hause (Hm y Ha)

Estos índices fueron propuestos por Hause[16], a fin de dar cumplimiento a ciertos criterios dentro del estudio del modelo de equilibrio de Cournot¹¹. Estos criterios son:

1. Si los dos elementos de mayor tamaño en el conjunto \mathbf{X} tienen ambos un valor mayor a cierta constante estrictamente positiva, entonces la concentración debería

¹¹Este modelo se detalla en la siguiente sección.

ser mayor que lo establecido por el HHI, debido a que se reflejaría la existencia de una colusión tácita o explícita.

2. Si el elemento de mayor tamaño en el conjunto \mathbf{X} tiene un valor mayor que cierta constante estrictamente positiva, y el resto de elementos tienen valores similares entre sí y cercanos a cero, entonces la medida de concentración debería aproximarse a S_1^2 .
3. A medida que N se incrementa y S_1 tiende a cero, la concentración debería aproximarse a lo especificado por el HHI. En el caso de conjuntos con variables aleatorias en situación ideal, la concentración sería $1/N$.
4. Si un conjunto \mathbf{X} tiene una curva de concentración menor que otra de un conjunto \mathbf{X}^* , el primero debería tener una concentración menor.¹²
5. La concentración debe ser una función decreciente y convexa del equivalente numérico n_e .
6. La concentración debería ser 1 si el equivalente numérico es 1, y debería tender a cero a medida que el equivalente numérico crece.

Visto esto, Hause presenta el índice multiplicativo H_m , que corresponde a la segunda clasificación de Marfels, tal que

$$H_m = \sum_{i=1}^N S_i^{2-(S_i(HHI-S_i^2))^\alpha} \quad (16)$$

donde α es un parámetro que decrece a medida que existen mayores indicios de colusión o cooperación entre competidores del mercado representado por \mathbf{X} . Hause plantea un valor de $\alpha \geq 0,15$, a fin de asegurar que se cumpla su quinto criterio. Vale resaltar que si $\alpha \rightarrow \infty$, se obtiene que $H_m \rightarrow HHI$.

De igual manera, otra medida presentada por Hause que cumple con sus criterios, es el índice aditivo H_a , que tiene la forma

¹²Cfr. Axioma 1 de Hannah y Kay.

$$H_a = \sum_{i=1}^N \left(S_1^2 + (S_i (HHI - S_i^2))^{\beta} \right) \quad (17)$$

donde β es un parámetro similar en uso a α . A fin de garantizar la convergencia del HHI y del H_a para N suficientemente grande, Hause menciona la condición $\beta \geq 1$.

Nótese que el cumplimiento de las condiciones planteadas por Hannah y Kay, y Encaoua y Jacquemin, se restringen a los criterios quinto y sexto de Hause para el caso de la cardinalidad N ; y a la presunción de proporcionalidad con la dispersión vista la estrecha relación con el HHI.

Por otra parte, si S se encuentra en situación ideal, entonces los indicadores serán $H_{m,ideal} = (1/N)^{1-((N-1)/N^3)^{\alpha}}$, y $H_{a,ideal} = 1/N + N^{1-2\beta}(1 - 1/N)^{\beta}$; y en situación unitaria $H_m = H_a = 1$.

Finalmente, para la obtención de los equivalentes numéricos, cabe señalar la imposibilidad de obtener una ecuación algebraica como en las medidas anteriores. Por lo tanto, es pertinente el uso de métodos iterativos para cálculo de raíces como por ejemplo Newton – Raphson.

2.3. Implementación de Medidas de Concentración en R

Supóngase un mercado con 5 empresas competidoras, cuyas participaciones de mercado evolucionan durante 5 períodos de conformidad con lo observado en el Cuadro 1. Nótese que cada una de las columnas del cuadro puede interpretarse como un conjunto \mathbf{X} , y que en un principio existe una situación ideal, en el período segundo y en el quinto hay salida de operadores, y en el tercero ingresa uno.

Cuadro 1: Participaciones para ejercicio de implementación en R (%)

Empresa	Periodo (T)				
	1	2	3	4	5
1	20	33	40	41	62
2	20	27	27	25	24
3	20	20	18	13	8
4	20	0	10	9	6
5	20	20	5	2	0

Visto esto, a continuación se describen las funciones implementadas en lenguaje R respecto a las medidas de concentración antes descritas, así como los resultados concretos obtenidos para el mercado propuesto.¹³

2.3.1. Función Ck

La función Ck estima el índice de igual nombre y la curva de concentración para $T \geq 1$ vectores numéricos que representen conjuntos \mathbf{X} . Para esto, considera los siguientes argumentos:

datos Matriz donde cada columna representa un conjunto \mathbf{X} .

k Valor entero que representa el parámetro a aplicar para la estimación del indicador.

Si es menor a 1, entonces se calcula el índice C_1 ; si es un valor no entero, entonces se aplica la función `ceiling(k)`; y si es mayor al número máximo de elementos de \mathbf{X} , entonces toma este último valor.

conf Nivel de confianza a utilizar en la estimación del indicador.

err Margen de error a especificar por el usuario respecto a los valores ingresados en la matriz datos. Este parámetro da cuenta del reconocimiento que se haga sobre la precisión de la información ingresada en la función.

iter Número de iteraciones a ejecutarse en la estimación del indicador. Como se explica más adelante, el proceso de estimación se basa en el algoritmo Metropolis – Hastings.

La función reporta para cada columna de **datos**, un resumen de resultados que incluye:

Operadores Número de casos con valores ingresados mayores a 0.

Eq.Numérico Ver apartados anteriores de este documento para definición.

¹³La codificación de estas funciones puede observarse en el Anexo 1

Ck Valor estimado del indicador.

Ck_ideal Ver apartados anteriores de este documento para definición.

De igual manera, la función reporta para cada valor estimado del indicador, los límites inferiores y superiores de un intervalo de confianza con significancia $1 - conf$. Para la obtención del referido intervalo se aplican simulaciones Monte Carlo para Cadenas de Markov mediante el algoritmo Metropolis – Hastings, tal que para cada vector \mathbf{X} se generen nuevos vectores con media \mathbf{X} y varianza máxima $\mathbf{V} = [err, \dots, err]$. Luego de esto, se calcula el indicador para cada uno de los vectores generados, y finalmente se determinan los percentiles correspondientes para la construcción del intervalo de confianza.¹⁴

A modo de ejemplo, aplicando la función Ck en el mercado previamente descrito, para un valor de $k = 4$, se obtiene lo siguiente:

Cuadro 2: Resumen de resultados para ejemplo con función Ck

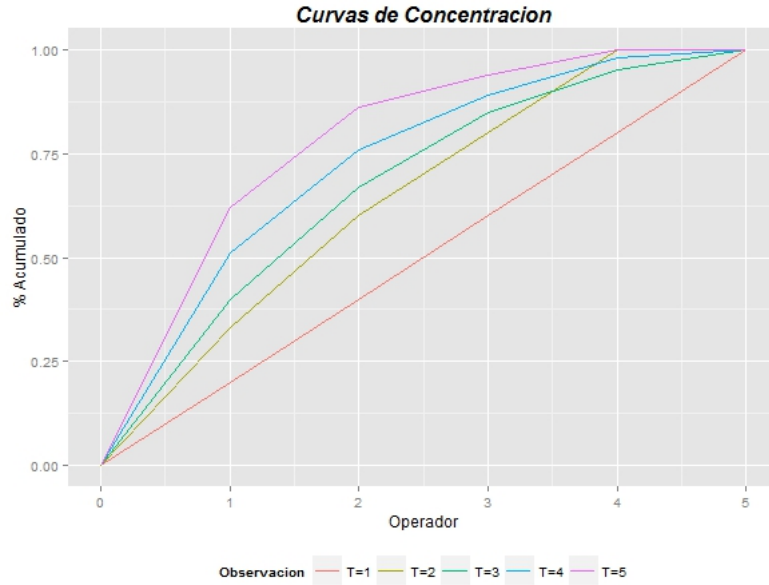
T	1	2	3	4	5
Operadores	5	4	5	5	4
Eq. Numérico	5.000	4.000	4.211	4.082	4.000
C4	0.800	1.000	0.950	0.980	1.000
C4 Ideal	0.800	1.000	0.800	0.800	1.000

Cuadro 3: Intervalos de confianza para ejemplo con función Ck

Nivel de Confianza		0.95	
Error		0.05	
Iteraciones		500	
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.800	0.800	0.850
2	0.954	1.000	1.000
3	0.912	0.950	0.995
4	0.938	0.980	0.999
5	0.955	1.000	1.000

¹⁴Dentro del algoritmo Metropolis – Hastings a usar se presume una distribución multinormal para obtener el factor de decisión α . Para más detalle ver Metropolis et. al.[25] y Hastings[15].

Figura 1: Curvas de concentración para ejemplo con función Ck



2.3.2. Función HHI

La función HHI estima el índice de igual nombre para $T \geq 1$ vectores numéricos que representen conjuntos \mathbf{X} , y define para cada uno si tienen un nivel de concentración alto, moderado o bajo en base a umbrales preestablecidos. Para esto, considera los argumentos:

datos Matriz donde cada columna representa un conjunto \mathbf{X} .

umbral_alto Valor numérico representando el límite inferior de todos aquellos valores del indicador categorizados como de concentración alta.

umbral_bajo Valor numérico representando el límite superior de todos aquellos valores del indicador categorizados como de concentración baja.¹⁵

conf Nivel de confianza a utilizar en la estimación del indicador.

err Margen de error a especificar por el usuario respecto a los valores ingresados en la matriz datos. Este parámetro da cuenta del reconocimiento que se haga sobre

¹⁵Entre los umbrales bajo y alto se dice que existe una concentración moderada. La FTC de los Estados Unidos (2010) establece como umbrales alto y bajo a 0.25 y 0.15, respectivamente.

la precisión de la información ingresada en la función.

iter Número de iteraciones a ejecutarse en la estimación del indicador. El proceso de estimación se basa en el algoritmo Metropolis – Hastings.

La función reporta para cada columna de **datos**, un resumen de resultados que incluye:

Operadores Número de casos con valores ingresados mayores a 0.

Eq. Numérico Ver apartados anteriores de este documento para definición.

HHI Valor estimado del indicador.

HHI_ideal Ver apartados anteriores de este documento para definición.

Nivel Concentración alta, moderada o baja de acuerdo a umbrales.

De igual manera, se reporta para cada valor del indicador, los límites inferiores y superiores de un intervalo de confianza con significancia $1 - conf$.

A modo de ejemplo, aplicando la función HHI en el mercado previamente descrito, se obtiene lo siguiente:

Cuadro 4: Resumen de resultados para ejemplo con función HHI

T	1	2	3	4	5
Operadores	5	4	5	5	4
Eq. Numérico	5.000	3.820	3.600	2.874	2.212
HHI	0.200	0.262	0.278	0.348	0.452
HHI Ideal	0.200	0.250	0.200	0.200	0.250
Nivel	Moderado	Alto	Alto	Alto	Alto

Cuadro 5: Intervalos de confianza para ejemplo con función HHI

Nivel de Confianza			0.95
Error			0.05
Iteraciones			500
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.200	0.200	0.206
2	0.239	0.262	0.273
3	0.252	0.278	0.319
4	0.306	0.348	0.390
5	0.384	0.452	0.513

Figura 2: Evolución del HHI para ejemplo con función HHI



2.3.3. Función RI

La función RI estima el índice de igual nombre, junto con el índice de Hall – Tideman y la curva de Lorenz para $T \geq 1$ vectores numéricos que representen conjuntos \mathbf{X} , y define para cada uno si tienen un nivel de concentración alto, moderado o bajo en base a umbrales preestablecidos. Para esto, considera los argumentos que listan a continuación:

datos Matriz donde cada columna representa un conjunto \mathbf{X} .

umbral_alto Valor numérico representando el límite inferior de todos aquellos valores del indicador categorizados como de concentración alta.

umbral_bajo Valor numérico representando el límite superior de todos aquellos valores del indicador categorizados como de concentración baja.

conf Nivel de confianza a utilizar en la estimación del indicador.

err Margen de error a especificar por el usuario respecto a los valores ingresados en la matriz datos. Este parámetro da cuenta del reconocimiento que se haga sobre la precisión de la información ingresada en la función.

iter Número de iteraciones a ejecutarse en la estimación del indicador. El proceso de estimación se basa en el algoritmo Metropolis – Hastings.

La función reporta para cada columna de **datos**, un resumen de resultados que incluye:

Operadores Número de casos con valores ingresados mayores a 0.

Eq.Numérico Ver apartados anteriores de este documento para definición.

RI Valor estimado del indicador.

HTI Valor estimado del indicador.

RI(HTI)_ideal Ver apartados anteriores de este documento para definición.

Coef_Gini Coeficiente de Gini que mide la inequidad de la distribución.

Nivel Concentración alta, moderada o baja de acuerdo a umbrales.

De igual manera, se reporta para cada valor del indicador, los límites inferiores y superiores de un intervalo de confianza con significancia $1 - conf$.

A modo de ejemplo, aplicando la función RI en el mercado previamente descrito, se obtiene lo siguiente:

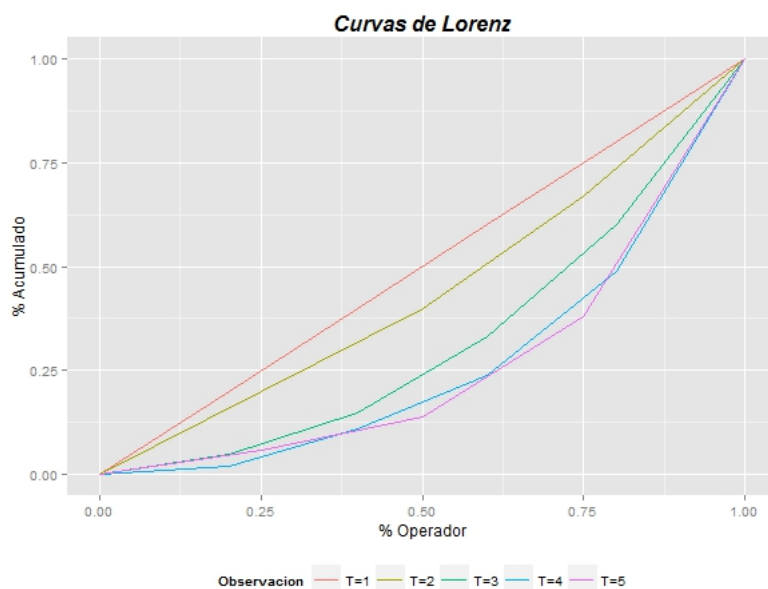
Cuadro 6: Resumen de resultados para ejemplo con función RI

T	1	2	3	4	5
Operadores	5	4	5	5	4
Eq. Numérico	5.000	3.540	3.260	2.720	2.160
RI	0.200	0.284	0.312	0.379	0.484
HTI	0.200	0.282	0.307	0.368	0.463
RI(HTI) Ideal	0.200	0.250	0.200	0.200	0.250
Coef. Gini	0.000	0.120	0.360	0.472	0.483
Nivel	Moderado	Alto	Alto	Alto	Alto

Cuadro 7: Intervalos de confianza para ejemplo con función RI

Nivel de Confianza		0.95	
Error		0.05	
Iteraciones		500	
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.200	0.200	0.223
2	0.251	0.284	0.312
3	0.267	0.312	0.380
4	0.317	0.379	0.464
5	0.374	0.484	0.595

Figura 3: Curvas de Lorenz para ejemplo con función RI



2.3.4. Función CCI

La función CCI estima el índice de igual nombre para $T \geq 1$ vectores numéricos que representen conjuntos \mathbf{X} . Para esto, considera como argumentos:

datos Matriz donde cada columna representa un conjunto \mathbf{X} .

conf Nivel de confianza a utilizar en la estimación del indicador.

err Margen de error a especificar por el usuario respecto a los valores ingresados en la matriz **datos**. Este parámetro da cuenta del reconocimiento que se haga sobre la precisión de la información ingresada en la función.

iter Número de iteraciones a ejecutarse en la estimación del indicador. El proceso de estimación se basa en el algoritmo Metropolis – Hastings.

La función reporta para cada columna de **datos**, un resumen de resultados que incluye:

Operadores Número de casos con valores ingresados mayores a 0.

Eq. Numérico Ver apartados anteriores de este documento para definición.

CCI Valor estimado del indicador.

CCI_ideal Ver apartados anteriores de este documento para definición.

De igual manera, publica para cada valor del indicador, los límites inferiores y superiores de un intervalo de confianza con significancia $1 - \text{conf}$.

A modo de ejemplo, aplicando la función CCI en el mercado previamente descrito, se obtiene lo siguiente:

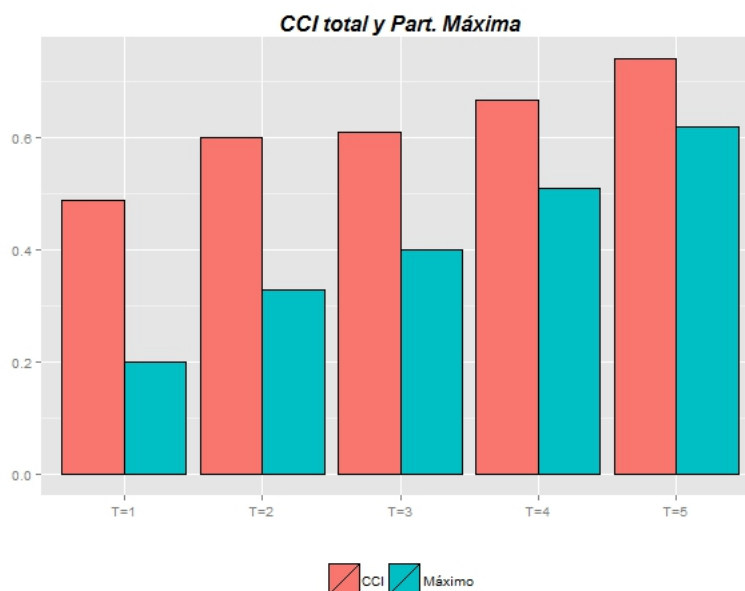
Cuadro 8: Resumen de resultados para ejemplo con función CCI

T	1	2	3	4	5
Operadores	5	4	5	5	4
Eq. Numérico	5.000	3.798	3.721	3.257	2.760
CCI	0.488	0.600	0.609	0.667	0.741
CCI Ideal	0.488	0.578	0.488	0.488	0.578

Cuadro 9: Intervalos de confianza para ejemplo con función CCI

Nivel de Confianza			0.95
Error			0.05
Iteraciones			500
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.488	0.488	0.508
2	0.563	0.600	0.609
3	0.579	0.609	0.654
4	0.632	0.667	0.706
5	0.688	0.741	0.779

Figura 4: Evolución de CCI para ejemplo con función CCI



2.3.5. Función HKI

La función HKI calcula el índice de igual nombre y la curva de α -concentración¹⁶ para $T \geq 1$ vectores numéricos que representen conjuntos \mathbf{X} . Para esto, considera los siguientes argumentos:

datos Matriz donde cada columna representa un conjunto \mathbf{X} .

¹⁶La curva α -concentración muestra el valor de HKI para distintos valores de α dado un conjunto \mathbf{X} .

alfa Valor numérico representando el parámetro a aplicar para la estimación del indicador. Si es menor o igual a 0, entonces se define $\alpha = 1$.

conf Nivel de confianza a utilizar en la estimación del indicador.

err Margen de error a especificar por el usuario respecto a los valores ingresados en la matriz datos. Este parámetro da cuenta del reconocimiento que se haga sobre la precisión de la información ingresada en la función.

iter Número de iteraciones a ejecutarse en la estimación del indicador. El proceso de estimación se basa en el algoritmo Metropolis – Hastings.

La función reporta para cada columna de **datos**, un resumen de resultados que incluye:

Operadores Número de casos con valores ingresados mayores a 0.

Eq.Numérico Ver apartados anteriores de este documento para definición.

Máximo Valor máximo al que podría llegar el indicador con $\alpha \rightarrow \infty$.

HKI Valor estimado del indicador.

HKI_ideal Ver apartados anteriores de este documento para definición.

De igual manera, publica para cada valor del indicador, los límites inferiores y superiores de un intervalo de confianza con significancia $1 - \text{conf}$.

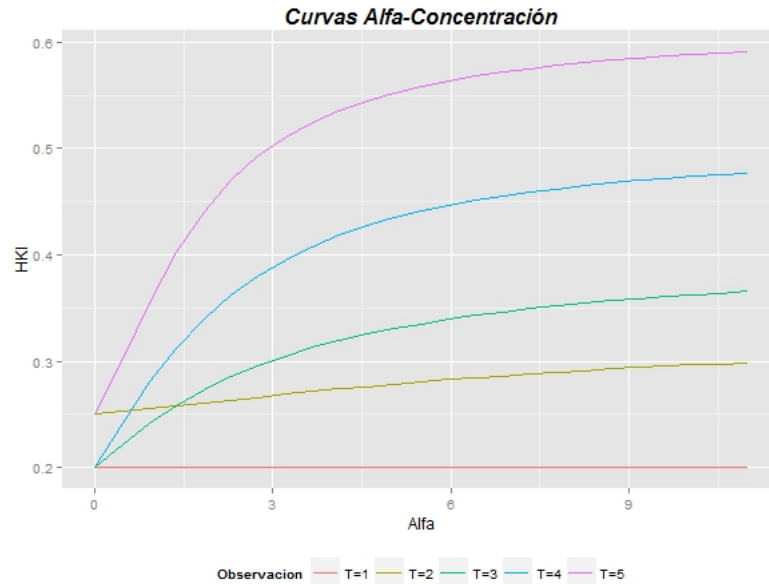
A modo de ejemplo, aplicando la función HKI en el mercado previamente descrito, para $\alpha = 5,5$, se obtiene lo siguiente:

Cuadro 10: Resumen de resultados para ejemplo con función HKI

T	1	2	3	4	5
Operadores	5	4	5	5	4
Eq. Numérico	5.000	3.565	2.984	2.264	1.792
Máximo	0.200	0.330	0.400	0.510	0.620
HKI	0.200	0.281	0.335	0.441	0.558
HKI Ideal	0.200	0.250	0.200	0.200	0.250

Cuadro 11: Intervalos de confianza para ejemplo con función HKI

Nivel de Confianza		0.95	
Error		0.05	
Iteraciones		500	
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.200	0.200	0.216
2	0.255	0.281	0.305
3	0.298	0.335	0.382
4	0.391	0.441	0.496
5	0.487	0.558	0.607

Figura 5: Curvas de α -concentración para ejemplo con función HKI

2.3.6. Función UI

La función UI estima el índice de igual nombre y la curva de iso-concentración para $T \geq 1$ vectores numéricos que representen conjuntos \mathbf{X} . Para esto, considera los siguientes argumentos:

datos Matriz donde cada columna representa un conjunto \mathbf{X} .

z Valor numérico positivo representando el parámetro a aplicar para el cálculo del índice. Si es menor a 0, entonces se calcula el índice con $z = 0$.

conf Nivel de confianza a utilizar en la estimación del indicador.

err Margen de error a especificar por el usuario respecto a los valores ingresados en la matriz datos. Este parámetro da cuenta del reconocimiento que se haga sobre la precisión de la información ingresada en la función.

iter Número de iteraciones a ejecutarse en la estimación del indicador. El proceso de estimación se basa en el algoritmo Metropolis – Hastings.

La función reporta para cada columna de **datos**, un resumen de resultados que incluye:

Operadores Número de casos con valores ingresados mayores a 0.

Eq. Numérico Ver apartados anteriores de este documento para definición.

Coef. Var Corresponde a la desviación estándar del conjunto como una fracción de la media.

UI Valor estimado del indicador.

UI_ideal Ver apartados anteriores de este documento para definición.

De igual manera, publica para cada valor del indicador, los límites inferiores y superiores de un intervalo de confianza con significancia $1 - conf$.

A modo de ejemplo, aplicando la función UI en el mercado previamente descrito, para $z = 2$, se obtiene lo siguiente:

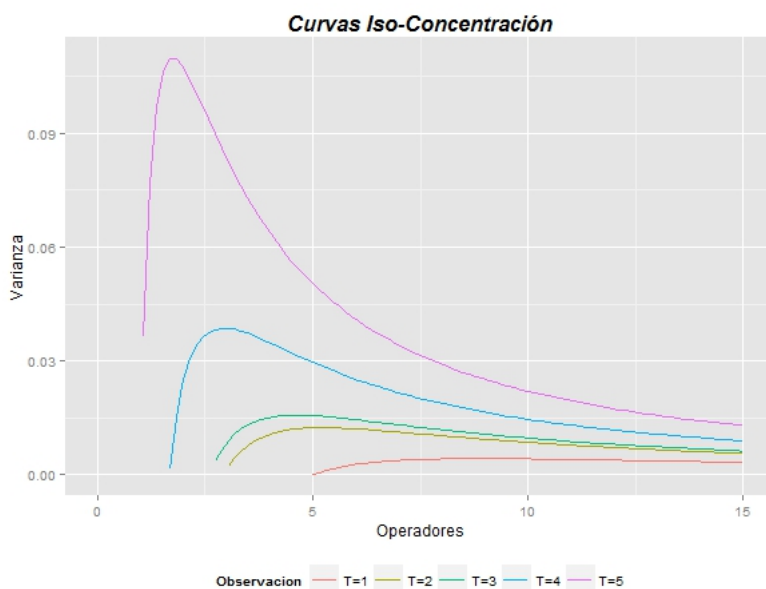
Cuadro 12: Resumen de resultados para ejemplo con función UI

T	1	2	3	4	5
Operadores	5	4	5	5	4
Eq. Numérico	5.000	2.918	2.592	1.651	0.979
Coef. Var.	0.000	0.556	0.624	0.860	1.122
UI	0.200	0.343	0.386	0.606	1.022
UI Ideal	0.200	0.250	0.200	0.200	0.250

Cuadro 13: Intervalos de confianza para ejemplo con función UI

Nivel de Confianza			0.95
Error			0.05
Iteraciones			500
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.200	0.200	0.212
2	0.286	0.343	0.364
3	0.319	0.386	0.502
4	0.468	0.606	0.771
5	0.734	1.022	1.326

Figura 6: Curvas de iso-concentración para ejemplo con función UI



2.3.7. Función Hause

La función Hause estima el índice de igual nombre, de los tipos multiplicativo y aditivo, para $T \geq 1$ vectores numéricos que representen conjuntos \mathbf{X} . Para esto, considera los argumentos:

datos Matriz donde cada columna representa un conjunto \mathbf{X} .

alfa Valor numérico positivo representando el parámetro a aplicar para la estimación del indicador multiplicativo. Si es menor a 0, entonces se estima el indicador con $\alpha = 0$.

beta Valor numérico positivo representando el parámetro a aplicar para la estimación del indicador aditivo. Si es menor a 0, entonces se estima el indicador con $\beta = 0$.

mult Valor lógico. Si es verdadero, entonces la función estima el índice multiplicativo, caso contrario, estima el índice aditivo.

conf Nivel de confianza a utilizar en la estimación del indicador.

err Margen de error a especificar por el usuario respecto a los valores ingresados en la matriz datos. Este parámetro da cuenta del reconocimiento que se haga sobre la precisión de la información ingresada en la función.

iter Número de iteraciones a ejecutarse en la estimación del indicador. El proceso de estimación se basa en el algoritmo Metropolis – Hastings.

La función reporta para cada columna de **datos**, un resumen de resultados que incluye:

Operadores Número de casos con valores ingresados mayores a 0.

Eq.Numérico Ver apartados anteriores de este documento para definición.

Hm(Ha) Valor estimado del indicador.

H_ideal Ver apartados anteriores de este documento para definición.

De igual manera, publica para cada valor del indicador, los límites inferiores y superiores de un intervalo de confianza con significancia $1 - conf$.

A modo de ejemplo, aplicando la función Hause en el mercado previamente descrito, para $\alpha = 0,15$ y $\beta = 1$, se obtiene lo siguiente:

Cuadro 14: Resumen de resultados para ejemplo con función Hause

T	1	2	3	4	5
Operadores	5	4	5	5	4
Eq. Numérico	5.000	3.903	3.994	3.450	2.819
	5.000	3.850	3.724	3.074	2.443
Hm	0.523	0.609	0.601	0.652	0.722
Hm Ideal	0.523	0.600	0.523	0.523	0.600
Ha	0.360	0.452	0.465	0.545	0.651
Ha Ideal	0.360	0.438	0.360	0.360	0.438

Cuadro 15: Intervalos de confianza para ejemplo con función Hause (multiplicativo)

Nivel de Confianza		0.95	
Error		0.05	
Iteraciones		500	
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.523	0.523	0.529
2	0.571	0.609	0.615
3	0.571	0.601	0.643
4	0.614	0.652	0.691
5	0.667	0.722	0.757

Cuadro 16: Intervalos de confianza para ejemplo con función Hause (aditivo)

Nivel de Confianza		0.95	
Error		0.05	
Iteraciones		500	
T	Límite Inferior	Valor Estimado	Límite Superior
1	0.360	0.360	0.369
2	0.416	0.452	0.463
3	0.431	0.465	0.517
4	0.496	0.545	0.599
5	0.581	0.651	0.705

2.3.8. Interpretación de Resultados

Los resultados obtenidos permiten concluir que las medidas de concentración implementadas en R tienen efectivamente la capacidad de entregar información relevante respecto a la aglomeración del conjunto \mathbf{X} , visto que su comportamiento a través del

tiempo es similar entre ellas y responde en términos generales a la estructura del mercado analizado, el cual evidencia un fortalecimiento de la empresa 1 en cuanto a su posición relativa frente a la competencia. Sin embargo, es necesario resaltar algunos aspectos importantes. Por una parte, el índice C_k , si bien es de comprensión sencilla, presenta limitaciones pues depende en gran medida del valor de N ; es así que por ejemplo en $T = 2$, mientras que los otros indicadores muestran una realidad de concentración distinta, el C_k establece que la aglomeración es máxima dado que en el caso expuesto $k = N$.

Por otra parte, destaca la semejanza de resultados en los indicadores HHI, RI, HTI y HKI. Como se mencionó líneas arriba, el primero de estos índices tiene la ventaja de ser simple en su construcción e interpretación, pero se limita a mostrar únicamente el nivel de aglomeración de \mathbf{X} ; mientras que el RI (y por consiguiente, el HTI), muestra una relación adicional con el grado de inequidad del conjunto. En línea con lo anterior, el HKI permite evaluar la concentración conjuntamente con la sensibilidad que el investigador estime que existe entre esta característica del conjunto y la dinámica de sus elementos, lo cual aporta significativamente al cumplimiento de las condiciones axiomáticas de Hall y Tideman, y Hannah y Kay.

Destaca también la semejanza observada entre el CCI y los índices propuestos por Hause. A pesar de esto, aun cuando el primero aporta información adicional en cuanto a la relevancia que tiene en la aglomeración del conjunto \mathbf{X} el elemento de mayor magnitud, los segundos permiten al investigador ir un paso más allá en el análisis estructural de mercados dentro del marco esquemático SCP, ya que dan libertad para estudiar las variaciones en los niveles de concentración ante la existencia de prácticas coordinadas tácitas o implícitas entre operadores.

Adicionalmente, cabe mencionar el no cumplimiento de la condición sexta de Hall y Tideman por parte del UI, como una importante limitación de esta medida. En efecto, el establecimiento de límites mínimos y máximos dentro del análisis industrial permite una adecuada comparación entre diferentes mercados y a través del tiempo. En el ejemplo, si bien el valor estimado en $T = 5$ puede interpretarse como que el mercado

en este período está más concentrado con respecto a los anteriores, genera dificultades al momento de establecer si la aglomeración se encuentra cercana a un nivel máximo.

Finalmente, y en lo que respecta al uso de esta implementación como herramienta para una autoridad nacional de competencia; si se considera el ejemplo presentado se concluye que el mercado se encuentra efectivamente concentrado, especialmente en los períodos 4 y 5 en los cuales los valores estimados de las medidas casi se duplican con respecto a su situación ideal ($T = 1$), y en los que la competencia efectiva se restringe a menos de 3 empresas atendiendo a lo indicado por los equivalentes numéricos. En consecuencia, existiría evidencia respecto a que este mercado mantiene una estructura oligopólica que merece la atención por parte de la mentada autoridad.

3. Modelo de Equilibrio de Mercado con Desviaciones

3.1. Consideraciones Iniciales

3.1.1. Parámetros para un Modelo de Equilibrio de Mercado

Sea N el número de operadores o empresas en un mercado cualquiera, cuya demanda inversa puede ser modelada sin pérdida de generalidad, con la ecuación lineal

$$P(Q) = a - bQ \quad (18)$$

donde $P(Q)$ corresponde al precio de mercado, y $Q = \sum_{i=1}^N q_i$ es la cantidad que se demanda a dicho precio. Entonces, es pertinente afirmar que la oferta de una empresa i cualquiera, está dada por q_i .

Dicha empresa i presenta una utilidad económica Π_i , la cual es su función objetivo a optimizar de acuerdo a la expresión

$$\Pi_i = P(Q)q_i - C(q_i)$$

donde $C(q_i)$ son los costos del operador. En una primera instancia, y a fin de simplificar el análisis, se asume que se manejan costos marginales iguales entre empresas c , así como costos fijos inexistentes, por lo que $C(q_i) = cq_i$.¹⁷ Nótese que con el objeto de garantizar el funcionamiento del mercado, se debe cumplir que $a > c$. Visto esto, se tiene que

$$\Pi_i = (a - c)q_i - bQq_i$$

Por otra parte, sea una medida de tamaño de mercado M , definida por la expresión

$$M = \frac{a - c}{b} \quad (19)$$

Un valor de a mayor implica un mercado más grande, dado que la demanda debería distanciarse del origen en todos sus puntos, manteniendo lo demás constante. Asimismo, un valor más pequeño de b conlleva a una mayor sensibilidad de los consumidores frente al precio, lo que igualmente desplaza la curva de demanda. Finalmente, menores costos marginales permiten captar una mayor proporción de la demanda total al derivar en menores precios, por lo que igualmente hay un mayor tamaño del mercado.

De este modo, es posible redefinir Π_i tal que

$$\Pi_i = (M - Q)bq_i \quad (20)$$

Ahora bien, el beneficio social del mercado B , se define como la sumatoria de las utilidades de todos los operadores económicos $i \in N$ más el excedente del consumidor E_c .¹⁸ Este último se obtiene de la ecuación $E_c = bQ^2/2$. Por lo tanto

$$B = \sum_{i=1}^N \Pi_i + E_c = \left(M - \frac{Q}{2}\right)bQ \quad (21)$$

¹⁷Este supuesto será revisados posteriormente en el documento.

¹⁸El excedente del consumidor consiste en la diferencia entre lo que están dispuestos a pagar los consumidores por un bien, y el valor que efectivamente pagan en el mercado.

3.1.2. Estructuras Comunes de Mercados

En un primer momento se estudian las condiciones de competencia perfecta. Si existe independencia en el actuar de los N participantes del mercado, hay simetrías en la información, los operadores (incluidos los consumidores) son precio aceptantes, y no existen barreras de entrada y salida, entonces se debería alcanzar un equilibrio cuando $P(Q) = c$. Lo anterior implica necesariamente que $\Pi_i = 0$ y que $Q = M$. Es decir, en competencia perfecta se atiende a la totalidad del tamaño de mercado; y no existe una demanda insatisfecha; quedando solamente no atendida aquella que quisiera participar del mercado a un precio por debajo del costo marginal c .

Es así que en esta estructura de mercado la producción de cada una de las empresas en el mercado será $q_i = M/N$ para todo i .

En línea con lo anterior, el beneficio social derivado de un mercado en competencia perfecta B_R está dado por $B_R = bM^2/2$.

Estudiando ahora el caso de un monopolio; esto es, con $N = 1$ y barreras a la entrada significativas; se tiene que la única empresa en el mercado maximizará su utilidad Π_M de modo que su oferta q_1 estará dada por $q_1 = Q = M/2$. Esto implica que un monopolio provee solamente a la mitad del mercado total atendido en competencia perfecta, obteniendo una utilidad de $\Pi_M = bM^2/4 > 0$.

El precio del monopolista será mayor al de competencia perfecta dada una menor oferta, y estará fijado por $P(Q = q_1) = c + bM/2$.

Para el caso de un monopolio, el beneficio social del mercado B_M es estrictamente menor que aquel obtenido para el caso de competencia perfecta. En efecto $B_M = 3bM^2/8 < B_R$.

Por otra parte, si las N empresas del mercado deciden actuar de manera coordinada, esto es, fijando su oferta en atención a las decisiones de sus competidores, se tiene que i maximizará su función objetivo tal que $q_i = M - Q$. Esta igualdad se denomina función de reacción de la empresa i , y determina la capacidad de producción que tiene dicho operador dada la oferta de sus competidores.

Como todas las empresas procederán de igual manera en lo concerniente a la maximización, se puede afirmar que

$$Q = \sum_{i=1}^N (M - Q) = NM - NQ$$

$$\Rightarrow Q = \frac{NM}{N+1}$$

la cual es menor a aquella cantidad atendida en competencia perfecta, pero mayor o igual a la ofertada en monopolio. Sustituyendo esta expresión en la función de reacción de i se tiene que para todas las empresas $q_i = M/(N+1)$; y el precio de mercado quedará definido por $P(Q) = c + bM/(N+1)$.

Vale señalar que el equilibrio obtenido en este caso se denomina equilibrio en competencia de Cournot desarrollado por el francés Antoine Cournot[7], cuyas características generales son las siguientes: si $N \rightarrow \infty$ entonces se alcanza nuevamente el equilibrio bajo competencia perfecta; y si $N = 1$ el equilibrio obtenido es el de monopolio.

Se concluye de esto que las decisiones coordinadas entre operadores de un mercado que se desvían de la competencia perfecta, al igual que el monopolio, tienden a incrementar los precios a través de una reducción en la oferta individual. Otras estructuras de mercado (vr. gr. Competencia de Bertrand bajo diferenciación de productos) conducen a implicancias similares. De hecho, cuando N es suficientemente grande, los resultados aquí evidenciados, y aquellos derivados del equilibrio de Bertrand son iguales, puesto que la competencia en los mercados se aproximaría a la competencia perfecta.

Dado esto, la utilidad percibida por cada operador en la dinámica de Cournot será $\Pi_i = bM^2/(N+1)^2 \leq \Pi_M$. Es decir, bajo un equilibrio de este tipo la utilidad de cada operador será positiva y menor o igual a aquella que percibiría un monopolio; adicionalmente, disminuirá a medida que el número de competidores en el mercado aumente.

En cuanto al beneficio social de mercado en la competencia de Cournot B_C , se tiene que

$$B_C = \frac{bM^2}{2} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2} \right)$$

Es importante señalar que este valor es estrictamente menor a aquel obtenido bajo competencia perfecta, y mayor o igual a aquel obtenido bajo un monopolio. Por lo tanto, es posible concluir en este apartado que $B_M \leq B_C < B_R$. Entonces, las acciones coordinadas y los monopolios, siendo acciones desviadas de la competencia perfecta, ocasionan pérdidas en eficiencia dentro de los mercados, con respecto a este último esquema.

3.2. Definición de un Modelo de Equilibrio de Mercado con Desviaciones (EMD)

En cuanto al grado de desviación y al número de empresas partícipes, se debe reconocer que los casos referidos en la sección precedente son extremos. Por una parte, la competencia perfecta presume que no existe cooperación (o desviación) en ningún nivel y que generalmente $N \gg 1$. El monopolio por su parte considera $N = 1$, lo cual supone que tampoco existe cooperación aunque sí una desviación. Finalmente, la competencia de Cournot establece un grado total de cooperación entre empresas del mercado, desviadas de la competencia perfecta.

La pregunta que surge en este punto es por tanto la siguiente: ¿Qué sucede si la desviación de posturas con respecto a la competencia perfecta se da en un subconjunto de empresas n tal que $n \leq N$? Para responder a esto, se puede asumir que i es una de las n empresas que se desvía, y que presenta la función de reacción

$$q_i = M - Q = M - \sum_{j \notin \{1, \dots, n\}} q_j - \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} q_k$$

Ahora bien, la primera sumatoria de la expresión anterior comprende todas las cantidades ofertadas de aquellos operadores que actúan de forma independiente (sin desviarse) por lo que

$$\sum_{j \notin \{1, \dots, n\}} q_j = \frac{(N - n)M}{N}$$

Por su parte, la segunda sumatoria comprende todas las cantidades de operadores coordinados entre sí o desviados, y que presentan la misma función de reacción, en consecuencia

$$\sum_{k \in \{1, \dots, n\}} q_k = \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} \left(M - \frac{(N - n)M}{N} - \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} q_k \right) = \frac{n^2 M}{N(n + 1)}$$

Reemplazando estos resultados en la expresión que determina q_i se obtiene que

$$q_i = \frac{nM}{N(n + 1)}$$

A modo de aproximación, es posible asumir que la participación agregada en el mercado de las n empresas desviadas S_n puede representarse por $S_n = n/N$. Nótese que esto es válido sí y solamente si los valores de N y n tienen correspondencia con el equivalente numérico de firmas en un mercado, tal que $n \sim S_n N$.¹⁹ Dado esto, se obtiene que para todas las empresas que coordinan posturas

$$q_i = \frac{S_n M}{n + 1} \quad (22)$$

Por lo que el total ofertado es

$$Q = M \left(1 - \frac{S_n}{n + 1} \right) \quad (23)$$

y el precio referencial del mercado estaría dado por

$$P(Q) = c + \frac{b S_n M}{n + 1} \quad (24)$$

El par de precio y cantidad obtenido en este ejercicio, y para efectos del presente documento, se denomina Equilibrio de Mercado con Desviaciones (EMD).

¹⁹ S_n siendo una participación de mercado, pertenece al conjunto $[0, 1]$.

Es importante notar que a diferencia de lo observado en los equilibrios de la sección precedente, el EMD no depende directamente de N sino del número efectivo de empresas desviadas n . Adicionalmente, destaca que dicho valor n , es proporcional a la cantidad ofertada Q y a $P^{-1}(Q)$; lo cual se explicaría por la mayor dificultad de sostener una desviación rentable a medida que se incrementa el número de empresas igualmente desviadas. En este sentido, nótese también que S_n es proporcional a Q^{-1} y a $P(Q)$, lo cual implica que las desviaciones con relación a la competencia perfecta son mayores en cuanto los operadores involucrados tengan un mayor peso en el mercado.

A fin de evaluar en una primera instancia la generalidad del modelo obtenido, se procede a verificar el cumplimiento las estructuras de mercado extremas referidas líneas arriba (competencia perfecta, monopolio y Cournot):

- Si no existe desviaciones de ningún tipo entonces $S_n \rightarrow 0$ y $n \rightarrow 0$; por lo tanto, el equilibrio resultante es aquel establecido en competencia perfecta.
- Por otro lado, si la desviación se da entre todas las empresas del mercado entonces $S_n = 1$ y $n = N$; entonces se alcanza el equilibrio de Cournot.
- Finalmente, si el mercado presenta un monopolio entonces $S_n = 1$ y $n = N = 1$; por lo que se genera el equilibrio en monopolio.

Además de esto, el EMD permite derivar el efecto que tendría la desviación desde la competencia perfecta de un solo operador en el mercado. De este modo

$$Q_{n=1} = M \left(1 - \frac{S_d}{2} \right) \quad P(Q)_{n=1} = c + \frac{bS_d M}{2} \quad (25)$$

donde S_d es la participación de mercado del operador desviado. Es decir, los efectos en precios y cantidades dentro del mercado, deberían ser proporcionales al tamaño relativo de la empresa que se desvíe de la competencia perfecta.

Ahora bien, la utilidad que percibiría una empresa dentro del acuerdo de cooperación en base al EMD sería

$$\Pi_i = b \left(\frac{S_n M}{n+1} \right)^2 \quad (26)$$

En cuanto al beneficio social del mercado B_{EGC} , se tiene que

$$B_{EGC} = \frac{bM^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_n}{n+1} \right)^2 \right) \quad (27)$$

y éste es menor a aquel derivado de la competencia perfecta. Además de esto, es mayor o igual al obtenido en Cournot, tal como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned} n \leq N &\Rightarrow \frac{n}{N} = S_n \leq \frac{n+1}{N+1} \Rightarrow \frac{S_n}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} \\ &\Rightarrow \left(\frac{S_n}{n+1} \right)^2 \leq \frac{1}{(N+1)^2} \\ &\Rightarrow \frac{bM^2}{2} \left(1 - \left(\frac{S_n}{n+1} \right)^2 \right) \geq \frac{bM^2}{2} \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2} \right) \\ &\Rightarrow B_{EGC} \geq B_C \end{aligned}$$

Entonces, es posible ampliar la conclusión obtenida en la sección precedente indicando que $B_M \leq B_C \leq B_{EGC} < B_R$. El resultado se explica en cuanto desviaciones de operadores económicos en un mercado, generan menores beneficios sociales a medida que menos ofertantes se desvían y ellos tienen un mayor peso relativo en el referido mercado.

3.3. Variaciones al Modelo EMD

En esta sección se discuten algunas modificaciones al modelo de EMD antes presentado, con el propósito de ampliar el alcance expuesto líneas arriba, así como establecer las motivaciones que determinan acción de desviarse por parte de las empresas en un mercado.

3.3.1. Existencia de Costos Fijos (Economías de Escala)

Sea en este caso la función de utilidad, la cual debe optimizarse por cada operador i que se desvíe $\Pi_i = (M - Q)bq_i - \mathcal{F}$, donde \mathcal{F} es un costo fijo igual para todo i .

Bajo este escenario el par precio cantidad del EMD no presenta modificación con lo expuesto en el apartado precedente dado que \mathcal{F} es una constante; sin embargo, las empresas que se desvíen estarán sujetas a la siguiente restricción, a fin de hacer rentable al acto de desviarse desde la competencia perfecta:

$$\Pi_i > 0 \Leftrightarrow b \left(\frac{S_n M}{n+1} \right)^2 > \mathcal{F} \quad (28)$$

De la expresión anterior se concluye que la coordinación entre operadores será más rentable a medida que el mercado sea suficientemente grande, el número de involucrados en la desviación sea reducido, su participación en el mercado sea significativa, y los costos fijos no sean excesivos. De forma complementaria, aquellos mercados con notorias economías de escala y estructura altamente fraccionada, presentarán menores incentivos para que los operadores se desvíen de la competencia perfecta.

Para desarrollar aún más la desigualdad anterior, es conveniente señalar que dada una elasticidad precio absoluta de la demanda η_P , se cumple que $b \approx P(Q)/(\eta_P Q)$. Adicionalmente, del par EMD antes calculado se tiene que

$$M = \frac{Q}{1 - \frac{S_n}{n+1}}$$

Por lo tanto, la desigualdad hallada para el caso de costos fijos se transforma en

$$\frac{\alpha_n^2 V}{\eta_P} > \mathcal{F} \quad (29)$$

donde $V = P(Q)Q$ es el valor o volumen total del mercado, y

$$\alpha_n = \frac{\frac{S_n}{n+1}}{1 - \frac{S_n}{n+1}}$$

Esto implica que para un mismo costo fijo \mathcal{F} , será menos rentable la desviación a

medida que la elasticidad precio de la demanda es mayor.

De manera complementaria, siendo f_i la fracción del volumen de mercado del operador i que representan los costos fijos \mathcal{F} , es plausible afirmar que $\alpha_n^2/\eta_P > f_i S_i$, donde S_i es la participación de mercado de la empresa i . Nótese que dado que los costos fijos son iguales para todos los partícipes del mercado, esta expresión puede fácilmente ser transformada a

$$\frac{\alpha_n^2}{\eta_P} > f_1 S_1 \quad (30)$$

en la cual el subíndice 1 denota al líder de mercado, es decir, al operador con la mayor participación.²⁰

3.3.2. Costos Marginales Diferentes (Heterogeneidad en Costos)

Sea en este caso, la función objetivo de cada empresa que desee desviarse $\Pi_i = (M_i - Q)bq_i$, donde $M_i = (a - c_i)/b$ y c_i es el costo marginal correspondiente a la empresa i desviada. Supóngase también que los operadores que no se desvían tienen todos un costo marginal c , y que no existen costos fijos para ningún ofertante. Procediendo a la maximización correspondiente, se obtiene que

$$q_i = M_i - \frac{(N - n)M}{N} - \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} q_k$$

Al igual que en la sección anterior, la sumatoria puede ser resuelta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} q_k &= \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} \left(M_k - \frac{(N - n)M}{N} - \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} q_j \right) \\ &= \frac{\mathbf{M}}{n + 1} - \frac{nM}{n + 1} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{M} = \sum_{k \in \{1, \dots, n\}} M_j$. Reemplazando estos resultados en la expresión que deter-

²⁰La utilidad de esta transformación se explica en la sección siguiente.

mina q_i se tiene que

$$q_i = \Theta_i + \frac{S_n M}{n+1}$$

donde $\Theta_i = M_i - (\mathbf{M} + M)/(n+1)$. Tomando en consideración que el costo marginal promedio de las empresas desviadas es \tilde{c} , el término Θ_i puede reescribirse como

$$\Theta_i = \frac{n(\tilde{c} - c_i) + (c - c_i)}{b(n+1)}$$

Por lo tanto

$$q_i = \frac{n(\tilde{c} - c_i) + (c - c_i)}{b(n+1)} + \frac{S_n M}{n+1} \quad (31)$$

Esto es, una empresa desviada ofertará en proporción directa a la diferencia de su costo marginal con el promedio de costos marginales de las demás empresas desviadas, y el promedio de costos marginales de los operadores en competencia perfecta.

La cantidad total en el mercado será

$$Q = \Delta + M \left(1 - \frac{S_n}{n+1} \right) \quad (32)$$

y el precio referencial estará dado por

$$P(Q) = c + \frac{b S_n M}{n+1} - b \Delta \quad (33)$$

donde $\Delta = n(c - \tilde{c})/b(n+1)$. Del par de precio y cantidad anterior, se puede concluir que socialmente es deseable que existiendo desviaciones a la competencia perfecta, las empresas implicadas sean eficientes en costos.

Adicional a esto, estudiando lo que sucede con la utilidad de las empresas desviadas, se tiene que

$$\Pi_i = n \left(\frac{S_n M}{n+1} + \Theta_i \right)^2 > 0 \quad (34)$$

La expresión anterior garantiza que siempre la utilidad será positiva; eso sí, las empresas desviadas desearán mantener costos marginales más bajos que la competencia para incrementar con esto sus retornos, y, de coordinar posturas, estarán motivadas a hacerlo con otras que presenten costos marginales mayores a los propios.

3.4. Implementación del Modelo EMD en Netlogo

A continuación se presenta la aplicación del modelo EMD mediante la utilización de sistemas adaptativos de agentes, y a través de la herramienta computacional Netlogo.²¹ En este sentido, se hace necesario iniciar con ciertas definiciones complementarias a las expuestas en los apartados precedentes, para posteriormente evidenciar los parámetros generales y específicos así como los resultados de las simulaciones realizadas.

3.4.1. Definiciones

Autómata Celular (CA)

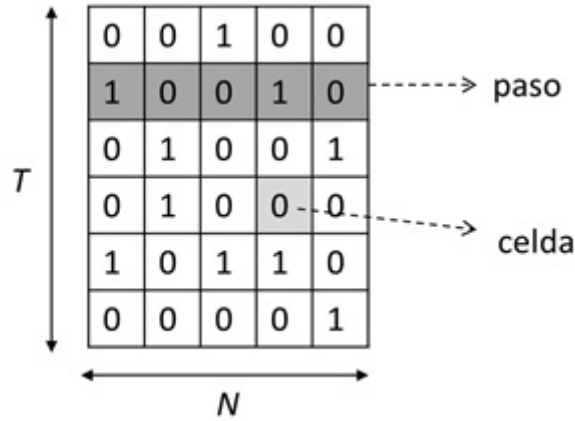
También llamados espacios, estructuras o teselados celulares; los CA tienen su origen en los trabajos de von Neumann y Burks[34] y Ulam[33]. De conformidad con lo mencionado por Wolfram[35], un CA se define como la idealización matemática de un sistema de agentes en el cual las condiciones espacio – tiempo son de naturaleza discreta, y toma como estructura un arreglo bidimensional $N \times T$, siendo T un número entero positivo de períodos en los cuales interactúan los N agentes a través de reglas preestablecidas.

La Figura 7 permite apreciar de manera gráfica la estructura básica de un CA. En ella, cada celda $a \in 1, \dots, N$ toma un valor $C_a^{(t)}$ que se define, en un paso dado $t \in 0, \dots, T$, como una función de los valores en el vecindario de la misma celda durante el paso inmediatamente anterior $t - 1$ (regla de asignación). Es decir,

$$C_a^{(t)} = f \left(C_{a-1}^{(t-1)}, C_a^{(t-1)}, C_{a+1}^{(t-1)}, \dots \right) \quad (35)$$

²¹Para la codificación del modelo EMD en Netlogo ver Anexo 2

Figura 7: Estructura básica de un CA



Respecto a lo mencionado, vale puntualizar primero que si $a = 1$ entonces $a - 1 = N$; y de forma correspondiente, si $a = N$ entonces $a + 1 = 1$. Esto es, el arreglo del CA se envuelve horizontalmente sobre sí mismo, o lo que es lo mismo, tiene forma conoidal. Lo anterior resulta relevante ya que garantiza que el comportamiento de una celda específica en un CA se vincule de forma dinámica con la estructura, el comportamiento y las características de todas las demás.

En segundo lugar y relacionado con lo anterior, es posible verificar que si N es impar y $t \geq (N - 1)/2$, o bien, si N es par y $t \geq N/2$, entonces el valor $C_a^{(t)}$ que tome una celda a depende en última instancia de los valores iniciales (paso $t = 0$) de todas las celdas en el CA. Esto es, las referidas condiciones iniciales son las que determinan su comportamiento en el largo plazo dentro del CA.

En tercer lugar, nótese que si $C_a^{(t)}$ es una variable binaria para todo a y para todo t , entonces existen 8 posibles ternas $(C_{a-1}^{(t-1)}, C_a^{(t-1)}, C_{a+1}^{(t-1)})$ que pueden definir el valor de $C_a^{(t)}$ a través de una configuración o regla dada. El Cuadro 17 evidencia tres ejemplos de este tipo de configuraciones. En consecuencia, si la función aplicada para asignar dicho valor es determinística, hay 256 posibles reglas que se aplicarían de forma única y fija para todo a y para todo t en un CA.

Cuadro 17: Ejemplos de reglas o configuraciones de CA

$C_{a-1}^{(t-1)}$	$C_a^{(t-1)}$	$C_{a+1}^{(t-1)}$	$C_a^{(t)}$		
			Regla 22	Regla 90	Regla 110
1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0

Nota: El nombre de una regla de CA viene de la correspondencia decimal con la secuencia binaria observada en la tabla (Por ejemplo: la secuencia 10110 tiene un valor decimal de 22)

Ahora bien, si la función de asignación es de naturaleza probabilística, en la que $C_a^{(t)}$ toma el valor 0 con una probabilidad ε , y 1 con una probabilidad $1 - \varepsilon$, las 256 configuraciones podrían alternarse en cada celda a y en cada paso t , lo cual daría lugar a que en un mismo CA existan hasta $256 \times N \times T$ diferentes reglas. Esto implica que la incorporación de criterios probabilísticos en el sistema, tienden a diversificar los resultados finales del mismo a través de mecanismo de adaptación aleatorios.²² En relación a esto, el Cuadro 18 permite observar la probabilidad de ocurrencia de una regla dada en función del número de ceros (0) que surjan de la secuencia binaria correspondiente en un CA probabilístico. Así por ejemplo, la regla 22 antes descrita tendría una probabilidad de ocurrencia $\varepsilon^5(1 - \varepsilon)^3$.

²²Esto es de suma importancia ya que la existencia de mecanismos de adaptación en sistemas complejos permiten una mejor aplicabilidad a sistemas sociales como los presentados en el documento.

Cuadro 18: Distribución y probabilidad de ocurrencia de reglas de CA probabilístico

Núm. Ceros	Núm. Reglas	Probabilidad	Ej. de Reglas
0	1	$(1 - \varepsilon)^8$	1
1	8	$\varepsilon(1 - \varepsilon)^7$	
2	28	$\varepsilon^2(1 - \varepsilon)^6$	
3	56	$\varepsilon^3(1 - \varepsilon)^5$	110
4	70	$\varepsilon^4(1 - \varepsilon)^4$	90, 30, Mayorías
5	56	$\varepsilon^5(1 - \varepsilon)^3$	22
6	28	$\varepsilon^6(1 - \varepsilon)^2$	5, 60
7	8	$\varepsilon^7(1 - \varepsilon)$	
8	1	ε^8	0

Finalmente, si el CA responde a una función determinística, la estructura observada en el momento $t = 0$ para las N celdas se repetirá en máximo 2^N pasos, generándose a partir de ahí un ciclo que siga el mismo comportamiento una y otra vez. Por el contrario, si las reglas se asignan de manera no determinística, la probabilidad de repetir una misma estructura con n unos y $N - n$ ceros estará dada por $\varepsilon^{(N-n)}(1 - \varepsilon)^n n!(N - n)!/N!$, y sin que se garantice la generación de un ciclo a partir de ese punto. Esto resulta importante ya que la inclusión de criterios probabilísticos en un CA aporta a que el modelo alcance de mejor manera el “límite del caos” mencionado por Packard[28] y Langton[21]; es decir, permite que se cree un sistema dinámico que no sea extremadamente sencillo de forma que termine siendo estático, ni sea demasiado activo y por tanto, caótico.²³

De lo mencionado anteriormente se concluye además que los CA poseen la ventaja de ser “*suficientemente simples como para permitir un análisis matemático en detalle, a la vez que ser suficientemente complejos para exhibir una amplia variedad de fenómenos complejos*” (Wolfram[35]).

Visto esto, en la implementación del modelo EMD en Netlogo, se plantea el uso de un CA probabilístico con las características antes expuestas, en la que cada celda a en un paso dado t represente a un operador económico dentro de un mercado de N competidores en un tiempo específico; y donde los distintos $C_a^{(t)}$ tomen valores de una

²³Cfr. Miller y Page[26].

variable dicotómica, tal que

$$C_a^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{si el operador se desvía} \\ 0 & \text{si el operador no se desvía} \end{cases} \quad (36)$$

En cuanto a la regla a utilizar, a continuación expone el esquema propuesto; y luego de ésta, se plantean las definiciones probabilísticas correspondientes. Vale señalar que para un correcto funcionamiento del CA, cada celda deberá contar con información específica del mercado objeto de estudio, así como con criterios de índole general. Esto se establecerá mediante los parámetros a presentarse posteriormente.

Ciclo de Edgeworth

De conformidad con lo establecido por Noel[27], un Ciclo de Edgeworth consiste en un patrón asimétrico que surge de un modelo dinámico de mercado bajo supuestos de competencia oligopólica, en el cual las condiciones de oferta de un operador se fijan en función del comportamiento de sus competidores. A modo de ejemplo, el siguiente cuadro da cuenta de un Ciclo de Edgeworth sencillo en un mercado de 3 empresas.

Cuadro 19: Ejemplo de Ciclo de Edgeworth

→ Competidor A	NR	R
↓ Competidor B		
NR	NR	R
R	R	R

Nota: NR = No restringir oferta; R = Restringir oferta

En el cuadro, una de las tres empresas decidirá no restringir su oferta (NR) si y solamente si sus dos competidores no restringen la suya; pero decidirá restringirla (R), como reacción a que al menos alguno de los competidores haga lo mismo.

En lo que respecta a la implementación del modelo EMD en Netlogo, conviene mencionar que otros trabajos como los de Keenan y O'Brien[20] ya han aplicado Ciclos de Edgeworth y CA para investigar la formación y el comportamiento de acuerdos restrictivos y prácticas colusorias ajenos a la competencia efectiva, por lo que su uso

en este contexto parecería ser acertado. De este modo, las Figuras 8 y 9 dan cuenta del Ciclo de Edgeworth que se planea utilizar. En este sentido, un operador cualquiera en el paso t , evaluará secuencialmente lo siguiente:

1. Existencia de un líder en el mercado con posición dominante.²⁴
2. Situación de desviación del líder con posición dominante.
3. Situación de desviación de vecindad.²⁵
4. Tamaño relativo frente a competidores.
5. Similitud en costos con competidores.
6. Existencia de costos fijos significativos.

Nótese que estos criterios ya han sido analizados en los apartados precedentes de este capítulo, y que el flujo del ciclo responde a los resultados y conclusiones allí alcanzadas.

²⁴Una empresa tiene posición dominante en un mercado cuando, debido a su tamaño relativo, es capaz de actuar de forma independiente determinando directa o indirectamente las condiciones de dicho mercado. Para efectos de este documento, se entenderá que existe posición dominante cuando en un mercado el HHI sea 1.5 veces el HHI ideal.

²⁵Se entiende como vecindad en un CA al conjunto de celdas contiguas de a , las cuales permiten la formación de la terna $(C_{a-1}^{(t-1)}, C_a^{(t-1)}, C_{a+1}^{(t-1)})$.

Figura 8: Ciclo de Edgeworth a utilizar en la implementación del modelo EMD (Caso sin posición dominante)

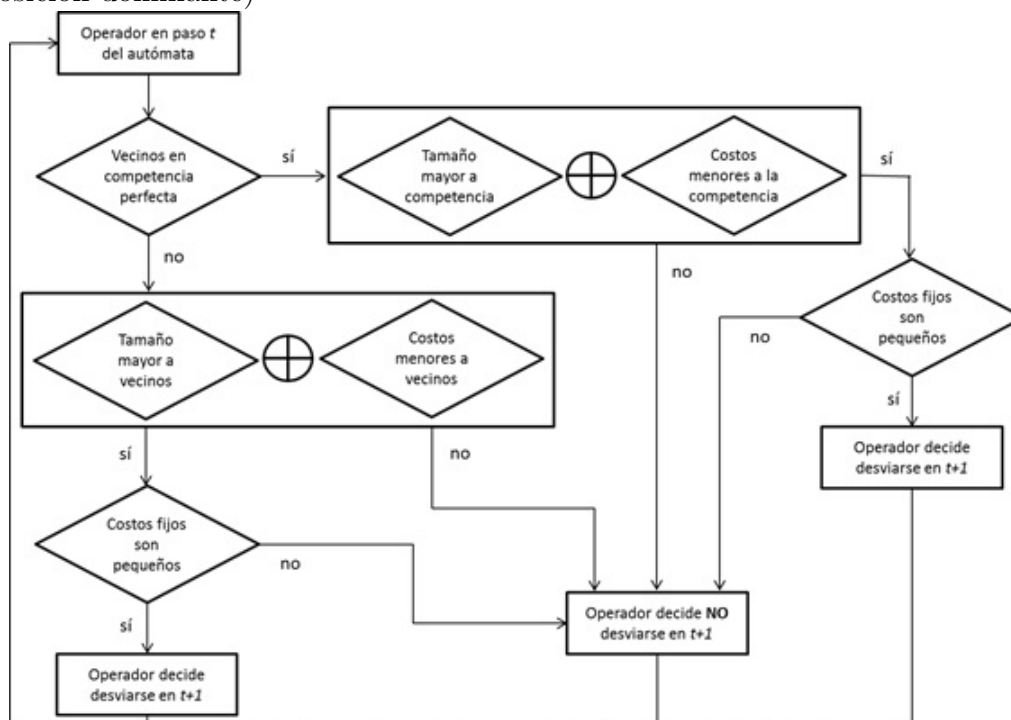
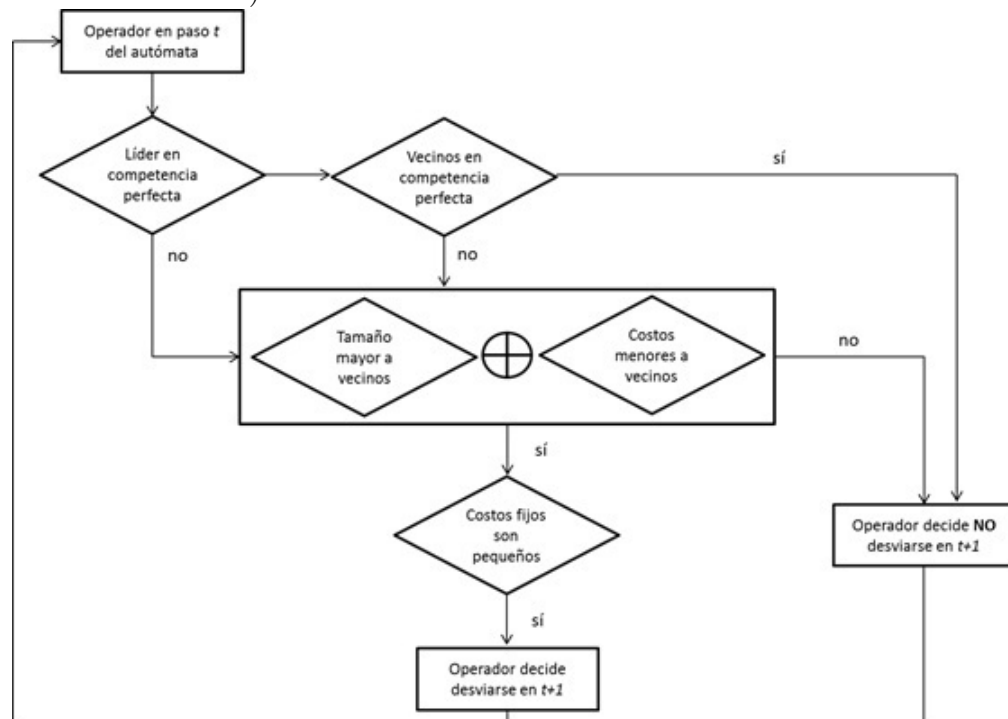


Figura 9: Ciclo de Edgeworth a utilizar en la implementación del modelo EMD (Caso con posición dominante)



En cuanto al ciclo a usar en caso que no exista posición dominante, se ha asumido

que cuando los vecinos inmediatos ya se han desviado, la decisión del operador se limita a compararse únicamente a ellos en relación a tamaño, homogeneidad en costos, y existencia y magnitud de costos fijos. Esto, ya que los operadores mantendrían la expectativa que en ante esta coyuntura, el análisis en todo el mercado ya fue hecho por los referidos vecinos. De igual forma, cuando existe posición dominante la evaluación de los criterios de tamaño y costos se limita a los vecinos debido a que la empresa mantendría la expectativa que el líder ya ha realizado la correspondiente evaluación del entorno. Nótese que lo anterior responde a la capacidad de las empresas en un mercado para tomar decisiones en función de información global o local, según sea el caso; permitiendo generar sistemas de redes complejos dentro del CA.

Funciones de Probabilidad para el CA

Como se mencionó anteriormente, las funciones de probabilidad permiten que el sistema creado sea suficientemente complejo como para garantizar resultados relevantes respecto al fenómeno estudiado, sin que se alcance un comportamiento caótico. Para efectos de este documento se plantea usar tres tipos de funciones de uso común en la literatura: la normal estándar, la logística y la racional. Las funciones antes referidas, pertenecen a un conjunto más amplio de funciones, las cuales tienen como principales características que son monótonas crecientes y que están acotadas inferiormente por 0 y superiormente por 1.

Por su parte, la función normal estándar, más conocida como Función de Probabilidad Acumulada (CDF) Normal Estándar, tiene la forma

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (37)$$

donde $\operatorname{erf}(t)$ es la función de error definida por

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-y^2} dy$$

Es posible realizar aproximaciones mediante métodos numéricos para la evaluación

de la función de error. De acuerdo con Press et. al.[29], ésta se puede aproximar de la siguiente forma

$$erf(t) \approx \begin{cases} 1 - \delta & t \geq 0 \\ \delta - 1 & t < 0 \end{cases} \quad (38)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta = \tau \times \exp(-t^2 - 1,26551223 + 1,00002368\tau + 0,37409196\tau^2 \\ + 0,09678418\tau^3 - 0,18628806\tau^4 + 0,27886807\tau^5 - 1,13520398\tau^6 \\ + 1,48851587\tau^7 - 0,82215223\tau^8 + 0,17087277\tau^9) \end{aligned}$$

$$\text{y } \tau = (1 + 0,5 |t|)^{-1}.$$

Por su parte, la función logística, también conocida como sigmoidal, tiene la forma

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (39)$$

y la racional, para efectos de este documento, se expresa por la igualdad

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \quad (40)$$

Respecto a la implementación del modelo EMD en Netlogo, estas funciones permitirán asignar una medida de probabilidad a la decisión de que un operador se desvíe en el mercado atendiendo tanto al hecho de contar con costos fijos significativos, como al de evidenciarse heterogeneidad en costos dentro de dicho mercado (parte de las reglas de decisión en el ciclo de Edgeworth).

En este sentido, para el caso de que existan costos fijos sea

$$x = \frac{\alpha_n^2}{\eta_P f_1 s_1}$$

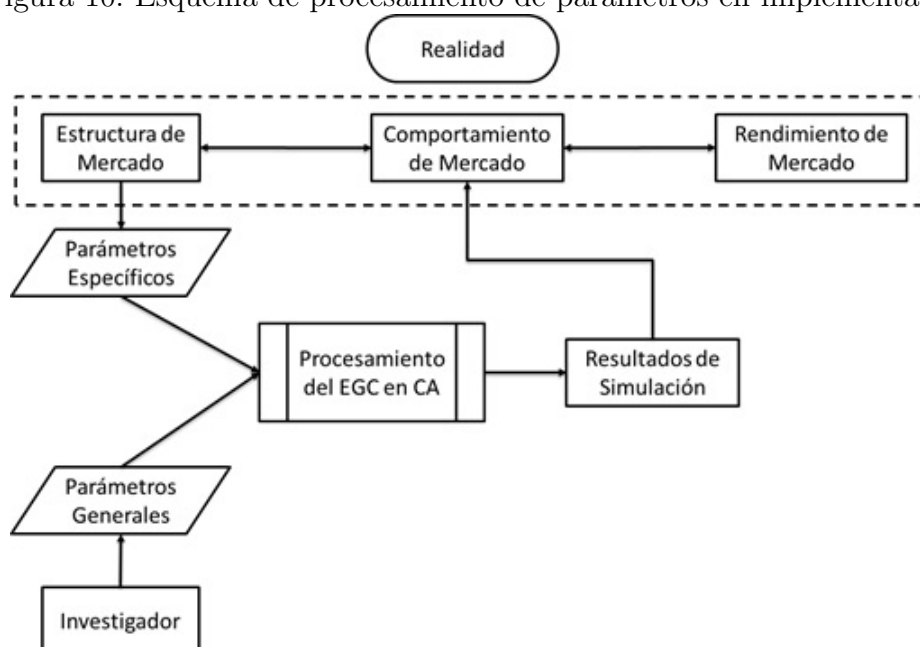
Como se vio en la sección anterior, existe una proporcionalidad directa entre el valor de x y el incentivo de una empresa a desviarse; entonces, la probabilidad de desviarse por este motivo estaría dada por $\mathbb{P}(\text{desvio}) = F(x)$, siendo $F(x)$ una función como las referidas líneas arriba.²⁶

3.4.2. Parámetros Generales y Específicos de la Simulación

En este apartado se discuten los parámetros iniciales del modelo que permiten proceder con la simulación a través de Netlogo. En una primera instancia se tratan los parámetros generales, es decir, aquellos que no son propios del mercado objeto de estudio sino que dependen únicamente del criterio del investigador. Posteriormente se presentan los parámetros específicos que responden consecuentemente, al mercado analizado.

Vale señalar que para efectos de esta simulación se tiene el siguiente esquema lógico de procesamiento de los parámetros:

Figura 10: Esquema de procesamiento de parámetros en implementación



Es decir, un entendimiento adecuado acerca del rendimiento de un mercado, dado

²⁶En el caso del análisis para heterogeneidad en costos se tomaría $x = c - c_i$, otorgando por tanto una mayor probabilidad de desviarse a aquellos operadores con costos marginales menores a la competencia.

un comportamiento específico desviaciones), se puede alcanzar a través de una simulación con CA que emplea el modelo EMD; y que se alimenta de parámetros específicos respecto a la estructura del mercado, y parámetros generales provenientes del investigador.

Parámetros Generales

Los parámetros generales dependen del criterio subjetivo del investigador en cuanto a características propias del CA a emplear, y por tanto ajenas al mercado analizado. La modificación de estos parámetros permitiría evaluar la significancia y consistencia de los resultados alcanzados dentro de un mismo mercado.

Número de pasos del autómata (T)

Cantidad de pasos a ejecutarse en el CA, en los cuales se procesa el Ciclo de Edgeworth definido líneas arriba para cada operador económico. En la implementación del modelo EMD en Netlogo se ha decidido establecer un rango de números enteros entre 50 y 500 pasos para que el investigador seleccione el valor que estime pertinente.

En cualquier caso, vale mencionar que de conformidad con lo expuesto líneas arriba, un CA con mayor número de pasos garantiza el surgimiento de todos los estados posibles en el mercado.

Número de iteraciones (B)

Cantidad de veces en las cuales el CA deberá reiniciarse con una paso inicial en $t = 0$ configurado con posiciones de celdas aleatorias, y tal como se definió inicialmente respecto a operadores desviados o no. Para la definición antes referida se recomienda ver el parámetro específico “Existencia de desviación inicial”. En la implementación del modelo EMD en Netlogo se establece un rango de números enteros entre 10 y 100 para que el investigador seleccione el valor que estime pertinente.

En este sentido, es importante señalar que el procedimiento de iterar el CA equivale a un mecanismo que remuestreo, el cual permite una mayor consistencia en los resultados que se extraigan, toda vez que se minimizan los efectos aleatorios derivados

de la simulación. Nótese que otros procesos estadísticos, tales como el bootstrapping, siguen la misma lógica para un número B de iteraciones.

Probabilidad a priori para desviarse en el modelo (**prob-priori**)

Probabilidad de que se den desviaciones de operadores económicos durante la simulación por efectos no medidos por los parámetros generales y específicos, y por ende, no controlados por el investigador. Para la implementación del modelo EMD en Netlogo se establece un rango entre 0.1 % y 5.1 %, de tal manera que si el investigador tiene certeza de la información ingresada en el sistema, puede optar por un porcentaje bajo, caso contrario es recomendable un valor mayor.

Función para estimar la probabilidad de desviación (**funcion-desv**)

Funciones de probabilidad $F(\bullet)$ que permiten asignar una medida de probabilidad a la decisión de que un operador coopere con otros en el mercado estudiado tal y como se describió líneas arriba . En la implementación del modelo EMD en Netlogo se presenta un menú desplegable que permite la selección de cualquiera de las funciones antes discutidas.

Nivel de confianza (**conf**)

Nivel de confianza de la simulación a realizar, el cual permite la identificación de intervalos estadísticos para los resultados de “Operadores Desviados” y “Participación Conjunta” que se expondrán más adelante en el documento. Para la implementación del modelo EMD en Netlogo se establecen los siguientes niveles: 70 %, 80 %, 90 %, 95 % y 99 %; visto que son los porcentajes más utilizados en la experimentación estadística.

Parámetros Específicos

Los parámetros específicos dependen de las condiciones del mercado analizado, por lo que los cambios que el investigador haga en ellos responderían principalmente a un análisis en distintos mercados, ya sea en un ámbito de producto, geográfico o temporal.

Número de operadores (**N**)

Cantidad de competidores en el mercado analizado; valor que se traduce en el número de columnas dentro del CA. En la implementación del modelo EMD en Netlogo, se ha establecido un rango de números enteros entre 1 y 25 ya que estudios del Ministerio Coordinador de Producción, Empleo y Competitividad[9] evidencian que al menos un 75 % de los mercados en el Ecuador tiene como máximo esta cantidad de competidores.

Como se vio en las secciones precedentes, el equilibrio obtenido y los incentivos de desviación derivados a partir del modelo EMD no dependen del número de operadores N ; sin embargo, su definición es importante a fin de asignar adecuadamente características como costos y participaciones de mercado dentro de la estructura del CA.

Proporción de costos fijos en volumen del líder (F)

Este porcentaje se ha denominado en apartados anteriores como f_i , y es el cociente entre el monto correspondiente a costos fijos y el volumen total de negocios de la empresa con la mayor participación en el mercado estudiado durante un período determinado. Para la implementación del modelo EMD en Netlogo, se ha establecido un rango entre 1 % y 100 %, visto que es sumamente improbable que existan actividades económicas que no posean costos fijos en el corto plazo.

Elasticidad absoluta precio de la demanda (Elasticidad)

De conformidad con su definición tradicional, este parámetro corresponde al porcentaje de reducción de la cantidad demandada en el mercado objeto de estudio, frente a una variación en 1 % en el precio allí transado. Para la implementación en Netlogo del modelo EMD, se ha establecido un campo que permite al investigador ingresar solamente números mayores a cero (0), lo cual se encuentra acorde a la Ley de la Demanda.

Grado de heterogeneidad en costos (h)

Se establece como una aproximación al grado de heterogeneidad en los costos existentes en el mercado, al número de desviaciones estándar que se observen en los costos reportados por las empresas participantes. En este sentido, en aquellos mercados en

los que los costos de producción sean homogéneos, la desviación estándar será 0, y se incrementará proporcionalmente a medida que exista una mayor heterogeneidad.

Para efectos de la aplicación del modelo EMD en Netlogo, se establece un rango entre 0 y 2 desviaciones estándar, y se asume una distribución normal de los costos con media 0. Nótese que lo anterior se justifica porque, como se vio en apartados anteriores, la magnitud del costo marginal de un operador económico (definida por el parámetro de locación en la distribución normal) no es relevante para determinar sus motivaciones de cooperación en el mercado, sino su posición relativa frente a los demás competidores.

Existencia de desviación estándar (**desv-inicial**)

Variable dicotómica que indica si la configuración de las celdas en el paso $t = 0$ del CA, debe considerar desviaciones. Esto es, permite asignar una posición inicial acorde a evidencias que el investigador tenga respecto a comportamientos ajenos a la competencia perfecta, previas a la realización el ejercicio de simulación. Para la implementación en Netlogo del modelo EMD se ha establecido un “interruptor” que al activarlo asigna aleatoriamente la condición de desviación en cada una de las celdas iniciales del CA.

Participaciones de mercado (**S**)

Cuota de mercado que cada operador económico participante mantiene al momento de realizar la simulación. En cuanto a esto, se debe cumplir que $\sum_{i=1}^N S_i = 1$, y para cada iteración $\beta \in \{1, \dots, B\}$ se define aleatoriamente la lista S_β como

$$S_\beta = \{S_i : \#S_\beta = \# \{S_1, \dots, S_N\}, i \in \{1, \dots, N\}\} \quad (41)$$

Para la implementación del modelo EMD en Netlogo, al momento de iniciar la simulación se solicita al investigador ingresar la participación de cada uno de los operadores económicos. Si las participaciones ingresadas no cumplen con la condición descrita en el párrafo anterior, se genera un mensaje de error y se suspende el ejercicio.

3.4.3. Resultados de la Simulación

En esta parte se presentan los resultados a observarse en Netlogo luego de realizada la simulación con el CA.

Configuración por Participación de Operadores

A través de este resultado, presentado como un monitor de Netlogo, es posible identificar las posiciones de las empresas para cada iteración $\beta \leq B$ del CA, atendiendo a su participación o cuota de mercado. De esta manera, el monitor reporta el vector S_β .

Herfindahl Hirschman

Este resultado, presentado como un monitor en Netlogo, evidencia al grado de concentración del mercado analizado. Tal y como se mencionó en la sección anterior, esta medida se calcula con la expresión $\sum_{i=1}^N S_i^2$.

Incremento Aproximado en Precios (%)

Este monitor presenta el valor estimado en que se incrementarían los precios del mercado como porcentaje del precio en competencia perfecta, producto de las desviaciones de los operadores económicos participantes. Para esto, considérese que dicho incremento \dot{p} estará dado por

$$\dot{p} = \frac{bS_n M}{c(n+1)} = \frac{S_n}{\eta_P(n+1)} \quad (42)$$

Reducción Aproximada en Oferta (%)

De manera semejante al resultado anterior, este monitor muestra el valor estimado en que se reduciría la oferta del mercado como porcentaje de la oferta en competencia perfecta, producto de desviaciones de las empresas competidoras. Sea entonces la mentada reducción \dot{q}

$$\dot{q} = \frac{S_n}{n+1} \quad (43)$$

Operadores Desviados

Valor promedio

Siendo $n_{\beta,t}$ el número de operadores desviados de conformidad con el Ciclo de Edgeworth antes definido durante la iteración $\beta \leq B$ y el paso $t \leq T$; el valor promedio \bar{n} se calcula de la siguiente manera

$$\bar{n} = \frac{1}{(\beta - 1)T + t} \sum_{i=1}^{\beta} \sum_{j=0}^t n_{i,j} \quad (44)$$

Intervalo de confianza

Dado que mientras transcurre la simulación se genera una lista de número de operadores desviados con valores $n_{\beta,t}$ para cada iteración $\beta \leq B$ y paso $t \leq T$; es posible la construcción de un intervalo de confianza. Para esto, es necesario determinar adecuadamente los límites L_{Inf} y L_{Sup} correspondientes al parámetro general **conf**. Esto, es posible hacerlo con las siguientes fórmulas:

$$L_{Inf} = v_{k_I} + d_I (v_{k_I+1} - v_{k_I}) \quad (45a)$$

$$L_{Sup} = v_{k_S} + d_S (v_{k_S+1} - v_{k_S}) \quad (45b)$$

donde v_{k_S} y v_{k_I} son valores de la lista ordenada de número de operadores desviados, que corresponden a las posiciones k_S y k_I , respectivamente, y que se obtienen de

$$k_S = \left\lfloor \left(1 - \frac{1 - \text{conf}}{2} \right) ((\beta - 1)T + t + 1) \right\rfloor$$

$$k_I = \left\lfloor \frac{1 - \text{conf}}{2} ((\beta - 1)T + t + 1) \right\rfloor$$

Además, se tiene que

$$d_S = \left(1 - \frac{1 - \text{conf}}{2} \right) ((\beta - 1)T + t + 1) - k_S$$

$$d_I = \frac{1 - \text{conf}}{2} ((\beta - 1)T + t + 1) - k_I$$

Gráfica de de evolución promedio

Esta gráfica muestra cómo evoluciona el promedio de operadores desviados en el mercado estudiado mientras transcurre la simulación.

Histograma

Esta gráfica evidencia la distribución del número de operadores desviados en la simulación.

Persistencia de Desviaciones

Este índice mide como porcentaje de T , el número de pasos que en promedio dura la mayor desviación observada entre los operadores económicos partícipes del mercado, en las B iteraciones de la simulación. En consecuencia, permite determinar si las desviaciones de la competencia en dicho mercado son estables en el tiempo, generando por tanto una mayor afectación desde la perspectiva de competencia. Visto esto, la fórmula aplicable sería

$$\text{Persistencia} = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{B} \sum_{\beta=1}^B \max_{\beta} (t_{\beta,1}^*, \dots, t_{\beta,N}^*) \right) \quad (46)$$

donde $t_{\beta,i}^*$ corresponde al número de pasos que dura la mayor desviación en la iteración $\beta \leq B$ del operador i partícipe del mercado.

Probabilidad Efectiva de Desviación

Este resultado mide qué tan probable es que se den desviaciones en el mercado en consideración a los parámetros generales y específicos inicialmente definidos, y la posterior simulación. Para esto, se contabilizan y promedian en cada una de las B iteraciones y para cada operador i , el número total de pasos $t_{\beta,i}^{**}$ en los que se evidenció una desviación; y finalmente se obtiene la media en cada $\beta \leq B$ como porcentaje de T . Por lo tanto, la ecuación correspondiente sería

$$\mathbb{P}_{efectiva}(desvio) = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{BN} \sum_{\beta=1}^B \sum_{i=1}^N t_{\beta,i}^{**} \right) \leq 1 \quad (47)$$

Participación Conjunta

Los resultados que aquí surgen permiten evidenciar la cuota promedio de mercado que los operadores desviados tienen en función de la simulación, así como los intervalos de confianza correspondientes, y gráficas de evolución e histogramas. En cuanto a esto, nótese su similitud con lo descrito en este apartado, en el tema “Operadores Desviados”. Vale señalar que para efectos de la implementación en Netlogo, se cumple que este resultado es equivalente al promedio de S_n en cada paso $t \leq T$ del CA.

3.4.4. Casos Ejemplificativos para Evaluar Implementación

En el presente apartado se muestran tres ejemplos reales de mercados en el Ecuador, en los cuales se ha aplicado la simulación del modelo EMD implementado en Netlogo. Cabe señalar que en cada uno de los casos expuestos se realizan 5 simulaciones diferentes a fin de evidenciar la robustez de los resultados.

En cuanto a los parámetros generales, el Cuadro 20 da cuenta de aquellos a ser utilizados en las simulaciones. Nótese que la función para estimar la probabilidad de desviación varía en cada ejemplo, con el propósito de evaluar el correcto funcionamiento de las opciones implementadas.

Cuadro 20: Parámetros generales a usarse en los ejemplos

Parámetro General	Valor
B	30
T	300
prob-priori	2.6 %
funcion-desv	Ej. 1: Logística
	Ej. 2: Normal
	Ej. 3: Racional
conf	80 %

Ejemplo 1: Mercado de Fabricación de Cemento para la Construcción

Para el año 2013, en el Ecuador se reportaron 4 empresas productoras de cemento para la construcción: Cementos Chimborazo, Industrias Guapán, Lafarge y Holcim; cuyas participaciones de mercado son de 4 %, 6 %, 23 % y 67 %, respectivamente. De conformidad con información declarada por las empresas, es posible estimar que el porcentaje de costos fijos en el volumen del líder alcanza el 1 %, y que el nivel de dispersión en costos es de 0.2 desviaciones estándar.²⁷ Para efectos de este documento, se asume que la elasticidad precio de la demanda es 1.5, en consideración al tipo de producto analizado que es homogéneo entre competidores, y por ende fácilmente sustituible. Adicionalmente, no se tiene evidencia que indique respecto a la existencia de una desviación inicial a la competencia efectiva.

El Cuadro 21 muestra los resultados de las 5 simulaciones realizadas. Destaca que dadas las características estructurales del mercado de producción de cemento para construcción, es posible inferir respecto a por lo menos 2 operadores, con una probabilidad de aproximadamente 62 % y un tamaño relativo conjunto del 88 %, que se desviarían de la competencia perfecta; situación que sería persistente (índice de persistencia entre 0.8 y 0.9) y con capacidad de generar un incremento en precios del 16 % y una consecuente reducción de la oferta en 24 puntos porcentuales.

Cuadro 21: Resultados de simulación en mercado de cemento para la construcción

Simulación	1	2	3	4	5
HHI	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51
\dot{p}	16.45	16.20	16.09	16.05	16.19
\dot{q}	24.68	24.30	24.13	24.07	24.29
\bar{n}	2.52	2.63	2.68	2.62	2.57
I.C. para \bar{n}	2 - 3	2 - 4	2 - 4	2 - 4	2 - 4
Persistencia	0.89	0.87	0.80	0.82	0.84
$\mathbb{P}(\text{desvio})$	60.05	63.54	63.51	62.55	62.13
\bar{S}_n	86.77	88.14	88.89	87.09	86.69
I.C. para \bar{S}_n	71 - 100	71 - 100	71 - 100	71 - 100	71 - 100

²⁷Esta información se ha obtenido a partir de las declaraciones de impuesto a la renta al SRI.

Figura 11: Gráfica de evolución e histograma para n en mercado de cemento de construcción (Simulación 5)

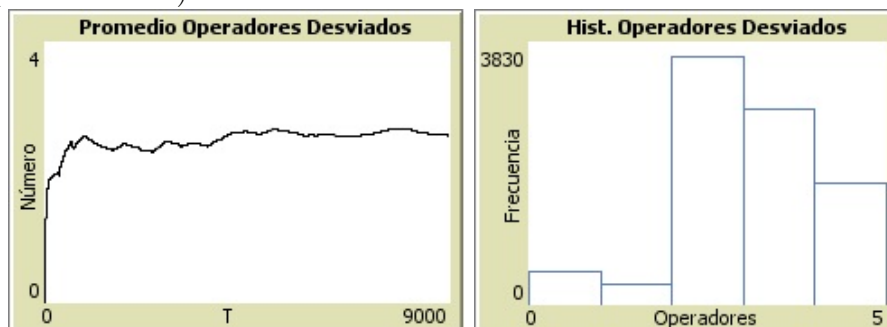


Figura 12: Gráfica de evolución e histograma para S_n en mercado de cemento de construcción (Simulación 5)



Ejemplo 2: Mercado de Transporte Aéreo en Rutas Nacionales

Para el año 2013, en el Ecuador se reportaron 3 empresas para los servicios de transporte aéreo en rutas nacionales: Aerogal, Tame EP y Aerolane; cuyas participaciones de mercado son de 17 %, 30 % y 53 %, respectivamente. De conformidad con información declarada por las empresas, es posible estimar que el porcentaje de costos fijos en el volumen del líder alcanza el 2 %, y que el nivel de dispersión en costos es de 0.5 desviaciones estándar. Para efectos de este documento, se asume que la elasticidad precio de la demanda es 1, en consideración al tipo de servicio analizado que puede ser sustituible siempre que la ruta ofertada entre operadores sea la misma. Adicionalmente, no se tiene evidencia que indique respecto a la existencia de una desviación inicial a la competencia efectiva.

El Cuadro 22 muestra los resultados de las 5 simulaciones realizadas. Destaca que dadas las características estructurales del mercado de transporte aéreo en rutas nacio-

nales, es posible inferir respecto a un promedio de 2 operadores, con una probabilidad de aproximadamente 64 % y un tamaño relativo conjunto del 78 %, que se desviarían de la competencia perfecta; situación que sería persistente (índice de persistencia mayor a 0.9) y con capacidad de generar un incremento en precios del 26 % y una consecuente reducción de la oferta en igual porcentaje dado que la elasticidad es unitaria.

Cuadro 22: Resultados de simulación en mercado de transporte aéreo en rutas nacionales

Simulación	1	2	3	4	5
HHI	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40
\dot{p}	26.58	25.91	26.09	26.08	26.52
\dot{q}	26.58	25.91	26.09	26.08	26.52
\bar{n}	1.95	2.00	2.09	1.93	1.95
I.C. para \bar{n}	1 - 3	1 - 3	1 - 3	1 - 3	1 - 3
Persistencia	0.92	0.92	0.92	0.92	0.91
$\mathbb{P}(\text{desvio})$	63.30	64.05	67.90	61.84	63.46
\bar{S}_n	78.29	77.69	80.48	76.47	78.23
I.C. para \bar{S}_n	53 - 100	70 - 100	53 - 100	53 - 100	53 - 100

Figura 13: Gráfica de evolución e histograma para n en mercado de transporte aéreo en rutas nacionales (Simulación 5)

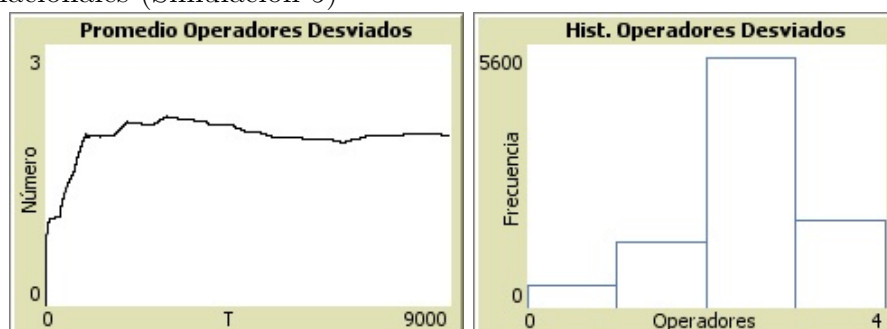
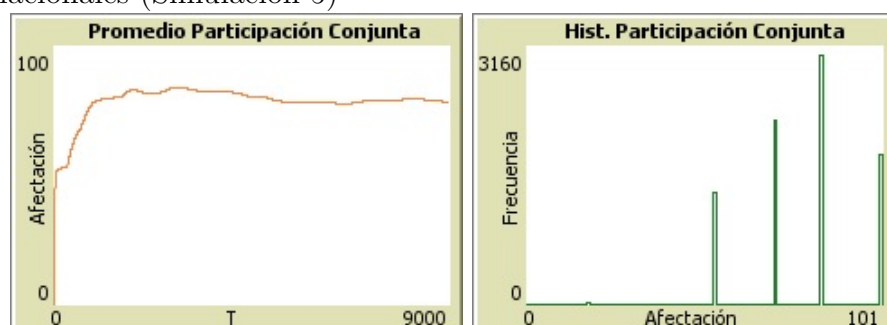


Figura 14: Gráfica de evolución e histograma para S_n en mercado de transporte aéreo en rutas nacionales (Simulación 5)



Ejemplo 3: Mercado de Provisión de Amoxicilina de 500 mg

Para el año 2012, en el Ecuador se reportaron 8 empresas con oferta de amoxicilina de 500 mg: Lamosan, Genfar, Life, Julpharma, LeSante, Garcos, Glaxosmithkline y Grunenthal; cuyas participaciones de mercado son de 5 %, 6 %, 7 %, 7 %, 11 %, 13 %, 22 % y 29 %, respectivamente. De conformidad con información consignada por las empresas en la base de IMSHealth Ecuador entre otras fuentes, es posible estimar que el porcentaje de costos fijos en el volumen del líder alcanza el 22 %, y que el nivel de dispersión en costos es de 1.1 desviaciones estándar. Para efectos de este documento, se asume que la elasticidad precio de la demanda es 0.5, en consideración al tipo de producto analizado que al ser un medicamento, presenta una baja sensibilidad frente al precio. Adicionalmente, no se tiene evidencia que indique respecto a la existencia de una desviación inicial a la competencia efectiva.

El Cuadro 23 muestra los resultados de las 5 simulaciones realizadas. Destaca que dadas las características estructurales del mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg, es posible inferir respecto a un promedio de un operador, con una probabilidad de aproximadamente 10 % y un tamaño relativo de cerca del 24 %, que se desviaría de la competencia perfecta; situación que no sería persistente (índice de persistencia menor a 0.1) aunque con capacidad de generar un incremento en precios del 27 % y una consecuente reducción de la oferta en 13 puntos porcentuales.

Cuadro 23: Resultados de simulación en mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg

Simulación	1	2	3	4	5
HHI	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
\dot{p}	26.26	26.31	26.14	26.83	26.73
\dot{q}	13.13	13.15	13.07	13.41	13.37
\bar{n}	0.83	0.83	0.77	0.85	0.82
I.C. para \bar{n}	0 - 2	0 - 2	0 - 2	0 - 2	0 - 2
Persistencia	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
$\mathbb{P}(\text{desvio})$	9.93	10.05	9.23	10.20	9.79
\bar{S}_n	23.99	24.08	23.10	24.84	24.27
I.C. para \bar{S}_n	6 - 51	6 - 48	6 - 47	6 - 51	6 - 49

Figura 15: Gráfica de evolución e histograma para n en mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg (Simulación 5)

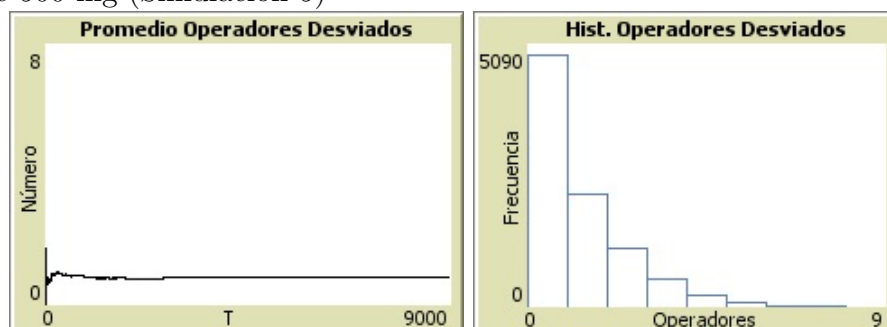
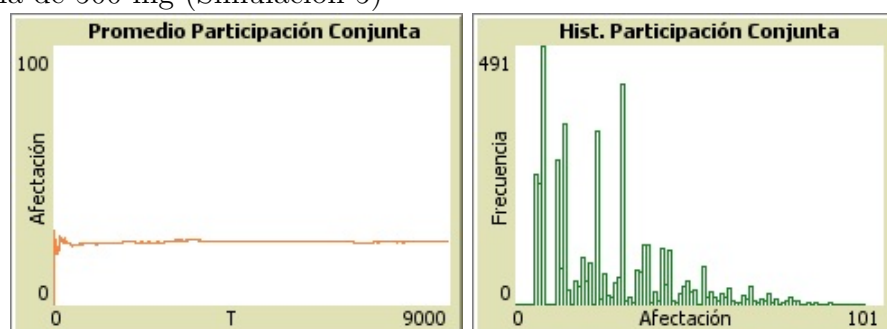


Figura 16: Gráfica de evolución e histograma para S_n en mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg (Simulación 5)



3.4.5. Interpretación de Resultados

Los ejemplos presentados en este documento, en los que se ha aplicado la implementación del modelo EMD en Netlogo, dan cuenta de cómo las condiciones estructurales de un mercado pueden efectivamente conducir a comportamientos por parte de las empresas partícipes en el ámbito de la dinámica competitiva.

En el mercado de fabricación de cemento para la construcción, la existencia de un líder con una participación significativamente mayor al resto de operadores, junto con bajos costos fijos y homogeneidad en la oferta, determinaría con una probabilidad alta la existencia de desviaciones a modo de cooperación tácita o implícita que sería persistente en el tiempo. De forma similar, en el mercado de transporte aéreo en rutas nacionales, si bien no habría evidencia de operadores con posición dominante, el pequeño número de competidores así como la presencia de bajos costos fijos con relación al volumen total de negocios, motivaría a la desviación persistente por parte de al menos una empresa,

o bien a la generación de acuerdos coordinados.

Contrario a esto, en el mercado de provisión de amoxicilina de 500 mg se evidenciaría una realidad distinta, en la que los ofertantes de este producto al tener una estructura más fragmentada y con costos fijos elevados con relación a su volumen de operaciones, contarían con menos incentivos para desviarse de la competencia efectiva a pesar de enfrentar una demanda inelástica.

Visto esto, si bien los resultados que se obtienen de la implementación realizada en este documento no son definitivos para determinar la existencia de prácticas ajenas al correcto funcionamiento de un mercado, se conforman en insumos fundamentales para una autoridad nacional de competencia en el ámbito de sus actividades de investigación y control. En efecto, este ejercicio permite desarrollar hipótesis respecto a cómo características de un mercado son capaces de generar situaciones que, en algunos casos, atentarían a la libre competencia y por consiguiente, al bienestar general de una economía.

4. Conclusiones

En este documento se han estudiado nueve medidas de concentración y un modelo de equilibrio con desviaciones, como instrumentos para el análisis estructural de mercados en el marco del esquema SCP de Chamberlin, Robinson y Bain. Para esto, se procedió a dar definiciones formales de los mentados instrumentos, así como a evaluar sus características fundamentales y sus principales variaciones. En esta parte además, se desarrollaron tópicos importantes entre los que destacan la idealización y homogeneidad del conjunto \mathbf{X} , la existencia de un equivalente numérico, los efectos de desviaciones parciales en mercados, y las consecuencias de la competencia en el bienestar general y la eficiencia.

En lo concerniente a la implementación computacional, se han establecido los argumentos y parámetros necesarios para una correcta adecuación de las medidas de concentración y el modelo EMD mediante los entornos de R y Netlogo, permitiendo

así el desarrollo posterior de software especializado en la materia. En este sentido y como ya se ha observado, este trabajo se conforma en una herramienta para el análisis estructural a llevarse a cabo por autoridades nacionales de competencia y otras instituciones de investigación de organización industrial, permitiendo el estudio de mercados a través del conocimiento de datos de fácil acceso (cuotas de mercado, estructuras de costos y elasticidades).

De forma más concreta, las medidas de concentración se constituyen en estimadores adecuados de la aglomeración del conjunto \mathbf{X} , que en el ámbito del análisis industrial, recoge información de las participaciones de un mercado. Sin embargo, se requiere puntualizar lo siguiente:

- Los índices Ck y HHI son las medidas de mayor simplicidad en cuanto a construcción e interpretación. A pesar de esto, el Ck se ve restringido por la cantidad de elementos del conjunto \mathbf{X} , pudiendo entregar resultados confusos e incompletos para el análisis de un mercado. Por su parte, el HHI solamente se limita a indicar el grado de concentración del conjunto frente a otras medidas que pueden relacionarse con estadísticos de inequidad o sensibilidad; y de acuerdo a lo expuesto por Hause, puede subsetimar la aglomeración de un mercado en los casos que existan prácticas colusorias.
- El índice UI de Davies da mayor libertad para que el investigador pueda asignar el peso que la dispersión del conjunto \mathbf{X} tiene en la concentración, y genera la curva de iso -concentración; pero presenta una limitación al no cumplir la condición axiomática sexta de Hall - Tideman, dificultando el proceso de comparación de valores entre e intra mercados.
- El índice CCI facilita la comprensión de cómo el operador líder de un mercado puede afectar el nivel de concentración. Por su parte, el RI y el HTI se vinculan estrechamente con medidas de inequidad comúnmente usadas en la literatura económica. Asimismo, el HKI relaciona la concentración con la sensibilidad de ésta frente a variaciones en N y en los elementos S_i de \mathbf{X} . Por tanto, estas

medidas entregan mayor información al investigador para el análisis estructural de un mercado.

- Los indicadores Hause tienen la ventaja adicional que permiten fusionar el estudio de concentración con aquel correspondiente al comportamiento de las empresas partícipes de un mercado. Efectivamente, con esta medida es posible evaluar cómo las prácticas concertadas influyen en el nivel de aglomeración del mercado representado por el conjunto \mathbf{X} .

Sobre el modelo EMD vale destacar su aplicabilidad más general que aquella alcanzada con otras estructuras como la competencia perfecta, el monopolio o Cournot; lo cual permite una mayor profundidad en el análisis de un mercado específico en cuanto a desviaciones de operadores desde la competencia perfecta. En este sentido, el modelo permite al investigador conocer los efectos de tales desviaciones como función del número de empresas involucradas n , y el tamaño relativo de éstas S_n ; así como conocer las implicancias de que los competidores enfrenten economías de escala y heterogeneidad en su oferta en caso de presentarse variaciones al comportamiento de competencia efectiva.

Adicionalmente, y a través de sistemas de simulación complejos como los empleados en este documento, se mencionó ya la posibilidad de generar hipótesis vinculadas a las formas en que las características de un mercado son capaces de definir situaciones que, en algunos casos, atentarian a la libre competencia y al bienestar general. Esto se convierte en la principal utilidad práctica del trabajo aquí desarrollado.

Finalmente, a modo de recomendación se plantea ahondar en el modelo EMD, por ejemplo con la incorporación de las denominadas variaciones conjeturales. Esto permitiría establecer grados de desviación de los operadores económicos de forma similar a lo realizado en otras estructuras tal y como se presenta en Martin[24]. En lo concerniente a la implementación computacional, esto se traduciría en el uso de autómatas de tipo continuo, cuya ejecución conllevaría resultados igualmente interesantes a los aquí observados.

Referencias

- [1] Bain, J.S. (1959). *Industrial Organization*. Nueva York: Wiley.
- [2] Bajo, O., Salas, R. (1999). *Inequity Foundations of Concentration Measures: An Application to the Hannah-Kay Indices*. Madrid: Universidad Carlos III.
- [3] Bernheim, B.D., Whinston, M.D. (1990). Multimarket contact and Collusive Behavior. *Journal of Economics*, 21(1).
- [4] Bikker, J.A., Haaf K. (2002). Measures of Competition and Concentration in the Banking Industry: A Review of the Literature. *Economic and Financial Modelling*.
- [5] Carlton, D.W., Perloff, J.M. (2005). *Modern Industrial Organization*. Londres: Pearson/Addison Wesley.
- [6] Chamberlin, E.H. (1933). *The Theory of Monopolistic Competition*. Cambridge: Harvard University Press.
- [7] Cournot, A.A. (1863). *Principes de la Theorie des Richesses*. Paris: BnF.
- [8] Davies, S.W. (1979). Choosing between Concentration Indices: The Iso-Concentration Curve. *Economica*, 46, 67 – 75.
- [9] Ecuador. Ministerio Coordinador de Producción, Empleo y Competitividad. (2013). *Propuesta de Regla de Mínimis con Información de Censo Nacional Económico 2010*. DI-2013-007-E. Quito.
- [10] Encaoua, D., Jacquemin, A. (1980). Degree of Monopoly: Indices of Concentration and Threat of Entry. *International Economic Review*, 21, 87 – 105.
- [11] Eraso, L., García, C. (1990). Concentración Industrial y Medidas de Información. *Investigaciones Económicas*, 14 (2), 225 - 237.
- [12] Estados Unidos. Department of Justice and the Federal Trade Commission. (2010). *Horizontal Merger Guidelines*. Washington D.C..
- [13] Hall, M., Tideman, N. (1967). Measures of Concentration. *American Statistical Association Journal*, 162 – 168.
- [14] Hannah, L., Kay, J.A. (1977). *Concentration in Modern Industry*. Londres: Macmillan Press.
- [15] Hastings, W.K. (1970). Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and their Applications. *Biometrika*, 57, 97 – 109.
- [16] Hause, J.C. (1977). The Measurement of Concentrated Industrial Structure and the Size Distribution of Firms. *Annals of Economic and Social Measurement*, 6, 73 – 107.
- [17] Herfindahl, O.C. (1950). *Concentration in the Steel Industry*. Documento doctoral no publicado. Columbia University.

- [18] Hirschman, A.O. (1945). *National Power and the Structure of Foreign Trade*. Oakland: University of California Press.
- [19] Horvath, J. (1970). Suggestions for a Comprehensive Measure of Concentration. *Southern Economic Journal*, 36, 446 – 452.
- [20] Keenan, D.C., O'Brien, M.J. (1993). Competition, Collusion and Chaos. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, 327 – 353.
- [21] Langton, C.G. (1990). Computation at the Edge of Chaos. *Physica D*, 42.
- [22] Latreille, P.L, Mackley, J. (2003). Using Excel to Illustrate Hannah and Kay's Concentration Axioms. *International Reviews of Economic Education*, 117 - 127.
- [23] Marfels, C. (1971). Absolute and Relative Measures of Concentration Reconsidered. *Kyklos*, 24, 753 – 766.
- [24] Martin, S. (1993). *Advanced Industrial Economics*. Cambridge: Blackwell Publishers.
- [25] Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., Teller, E. (1953). Equations of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087 – 1092.
- [26] Miller, H., Page, S. (2007). *Complex Adaptive Systems*. Princeton: Princeton University Press.
- [27] Noel, M.D. (2011). *Edgeworth Price Cycles*. San Diego: University of California.
- [28] Packard, N.H. (1988). *Adaptation toward the Edge of Chaos*. Urbana: University of Illinois Press.
- [29] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [30] Robinson, J. (1933). *Economics of Imperfect Competition*. Londres: Macmillan Press.
- [31] Rosenbluth. G. (1955). Measures of Concentration, en Business Concentration and Price Policy. *National Bureau Committee for Economic Research, Princeton*, 57 – 99.
- [32] Tirole, J. (1994). *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge: The MIT Press.
- [33] Ulam, S. (1974). Some Ideas and Prospects in Biomathematics. *Annual Review of Biology*, 255.
- [34] Von Neumann, J., Burks, A.W. (1966). *Theory of self – reproducing Automata*. Urbana: University of Illinois Press.
- [35] Wolfram, S. (1983). Statistical Mechanics of Cellular Automata. *Reviews of Modern Physics*, 55 (3), 601 – 644.

Anexos

1. Funciones en R de medidas de concentración

A continuación se expone la codificación de cada una de las funciones implementadas en R para la estimación de medidas de concentración revisadas en el documento. Para el correcto funcionamiento de las referidas funciones es necesario instalar previamente los paquetes `ggplot2` y `rootSolve`.

1.1. Función Ck

```
Ck = function (datos,K=4,conf=0.95,err=0.05,iter=500){
```

```
#####
#Definicion de variables#
#####
```

```
if (any(is.na(datos)) | any(datos<0)) {
  stop("Datos ingresados son inválidos")}
datos <- as.matrix(datos)
K <- max(1,ceiling(K))
n.c <- ncol(datos)
n.r <- nrow(datos)
if (length(colnames(datos)) == 0){
  colnames(datos) <- seq(1:n.c)}
K <- min(n.r,K)
Ck <- c()
N <- c()
Cksup <- c()
Ckinf <- c()
library(ggplot2)
```

```
#####
#Calculo de cuota#
#####
```

```
part <- scale(datos,center=seq(0,0,len=n.c),
              scale=colSums(datos))
```

```
#####
#Calculo de indice#
#####
```

```
#-----
#Operadores Activos
#-----
```

```
for (j in 1:n.c) {
```

```

x <- datos[,j]
N <- c(N,length(x[x>0]))
}

#-----
#Indicador Base
#-----

for (j in 1:n.c){
  part.ord <- sort(part[,j],decreasing=T)
  Ck <- c(Ck,sum(part.ord[1:K]))
}

#-----
#Indicadores adicionales
#-----

Ck.ideal <- K/N
Ck.ideal[Ck.ideal>1] <- 1

N_e <- K/Ck
for (j in 1:n.c) {if (N_e[j] > N[j]) {N_e[j] <- N[j]}}

#-----
#Intervalo de Confianza (Simulación Metropolis-Hastings)
#-----

for (j in 1:n.c){
  Ckmod <- c()
  for (it in 1:iter){
    partmod <- c()
    for (i in 1:n.r) {
      part.pot <- part[i,j] + runif(1,-err,err)
      a <- dnorm(part.pot,part[i,j],err)/dnorm(part[i,j],
                                                part[i,j],err)
      if (a > 1) {partmod <- c(partmod,abs(part.pot))}
      else {
        if (runif(1) < a) {partmod <- c(partmod,
                                         abs(part.pot))}
      }
    }
    partmod <- scale(partmod,center=0,scale=sum(partmod))
    partmod <- sort(partmod,decreasing=T)
    Ckmod <- c(Ckmod,sum(partmod[1:K]))
  }
  Cksup <- c(Cksup,quantile(Ckmod,1-(1-conf)/2))
}

```

```

Ckinf <- c(Ckinf,quantile(Ckmod,(1-conf)/2))
if (Ckinf[j] > Ck[j]) {Ckinf[j] <- Ck[j]}
if (Cksup[j] < Ck[j]) {Cksup[j] <- Ck[j]}
}

IC <- cbind(Ckinf,Ck,Cksup)
rownames(IC) <- colnames(datos)
colnames(IC) <- c("Limite Inferior","Valor Estimado",
                 "Limite Superior")

#-----
#Matriz de resultados
#-----

Resultado <- t(as.matrix(cbind(N,N_e,Ck,Ck.ideal)))
colnames(Resultado) <- colnames(datos)
rownames(Resultado) <- c("Operadores","Equivalente Numerico",
                        paste("C",K,sep=""),
                        paste(paste("C",K,sep=""),"Ideal"))

#####
#Publicacion de resultados#
#####

cat("\n")
cat("-----", "\n")
cat(paste("INDICE C",K,sep=""), "\n")
cat("-----", "\n")
cat("\n")

cat("Resumen de resultados:", "\n")
print(round(Resultado,digits=3))
cat("\n")

cat("Intervalos de confianza del indice:", "\n")
cat(paste("Nivel de Confianza: ",conf,sep=""), "\n")
cat(paste("Error: ",err,sep=""), "\n")
cat(paste("Iteraciones: ",iter,sep=""), "\n")
cat("\n")

print(round(IC,digits=3))

cat("\n")

#####
#Curvas de Concentración#
#####

```

```

part.ord <- sort(part[,1],decreasing=T)
data.graf <- cbind(replicate(n.r+1,1),
                  0:n.r,c(0,cumsum(part.ord)))
if (n.c > 1) {
  for (i in 2:n.c){
    part.ord <- sort(part[,i],decreasing=T)
    data.graf.caso <- cbind(replicate(n.r+1,i),
                          0:n.r,c(0,cumsum(part.ord)))
    data.graf <- rbind(data.graf,data.graf.caso)
  }
}
data.graf <- data.frame(data.graf)
colnames(data.graf) <- c("Observacion","Operador",
                        "Part.Acum")
data.graf$Observacion <- factor(data.graf$Observacion,
                               levels=1:n.c,
                               labels=colnames(datos))

conc.graf <- qplot(Operador,Part.Acum,data=data.graf,
                  ylim=c(0,1),xlim=c(0,n.r),
                  main="Curvas de Concentracion",
                  xlab="Operador",ylab="% Acumulado",
                  geom="line",colour=Observacion)

conc.graf + theme(plot.title=element_text(face="bold.italic",
                                           size="16"),
                  legend.position="bottom",
                  legend.background=element_rect(color="white"))
}

```

1.2. Función HHI

```

HHI = function (datos, umbral_alto = 0.25, umbral_bajo = 0.15,
conf=0.95,err=0.05,iter=500){

```

```

#####
#Definicion de variables#
#####

```

```

if (any(is.na(datos)) | any(datos<0)) {
  stop("Datos ingresados son inválidos")}
datos <- as.matrix(datos)
n.c <- ncol(datos)
n.r <- nrow(datos)
if (length(colnames(datos)) == 0) {
  colnames(datos) <- seq(1:n.c)}

```

```

N <- c()
Nivel <- c()
HHIsup <- c()
HHIinf <- c()
library(ggplot2)

#####
#Calculo de cuota#
#####

part <- scale(datos,center=seq(0,0,len=n.c),
               scale=colSums(datos))

#####
#Calculo de indice#
#####

#-----
#Operadores Activos
#-----

for (j in 1:n.c) {
  x <- datos[,j]
  N <- c(N,length(x[x>0]))
}

#-----
#Indicador Base
#-----

HHI <- colSums(part**2)

for (j in 1:n.c) {
  if (HHI[j] > umbral_alto) {Nivel <- c(Nivel,2)}
  else {if (HHI[j] > umbral_bajo) {Nivel <- c(Nivel,1)}
        else {Nivel <- c(Nivel,0)}}
}

#-----
#Indicadores adicionales
#-----

HHI.ideal <- 1/N
N_e <- 1/HHI

#-----

```

```

#Intervalo de Confianza (Simulación Metropolis-Hastings)
#-----

for (j in 1:n.c){
  HHImod <- c()
  for (it in 1:iter){
    partmod <- c()
    for (i in 1:n.r) {
      part.pot <- part[i,j] + runif(1,-err,err)
      a <- dnorm(part.pot,part[i,j],err)/dnorm(part[i,j],
                                                part[i,j],err)
      if (a > 1) {partmod <- c(partmod,abs(part.pot))}
      else {
        if (runif(1) < a) {partmod <- c(partmod,
                                         abs(part.pot))}
      }
    }
    partmod <- scale(partmod,center=0,scale=sum(partmod))
    partmod <- sort(partmod,decreasing=T)
    HHImod <- c(HHImod,sum(partmod**2))
  }
  HHIsup <- c(HHIsup,quantile(HHImod,1-(1-conf)/2))
  HHIinf <- c(HHIinf,quantile(HHImod,(1-conf)/2))
  if (HHIinf[j] > HHI[j]) {HHIinf[j] <- HHI[j]}
  if (HHIsup[j] < HHI[j]) {HHIsup[j] <- HHI[j]}
}

IC <- cbind(HHIinf,HHI,HHIsup)
rownames(IC) <- colnames(datos)
colnames(IC) <- c("Limite Inferior","Valor Estimado",
                  "Limite Superior")

#-----
#Matriz de resultados
#-----

Resultado = t(as.matrix(cbind(N,N_e,HHI,HHI.ideal,Nivel)))
colnames(Resultado) = colnames(datos)
rownames(Resultado) = c("Operadores","Equivalente Numerico",
                        "HHI","HHI Ideal","Nivel")

#####
#Publicacion de resultados#
#####

cat("\n")

```



```

cat("-----","\n")
cat("INDICE HERFINDAHL - HIRSCHMAN","\n")
cat("-----","\n")
cat("\n")

cat("Resumen de resultados:", "\n")
print(round(Resultado,digits=3))
cat("\n")

cat("Nivel: 2 = Alto, 1 = Moderado, 0 = Bajo","\n")
cat("\n")

cat("Intervalos de confianza del indice:", "\n")
cat(paste("Nivel de Confianza: ",conf,sep=""), "\n")
cat(paste("Error: ",err,sep=""), "\n")
cat(paste("Iteraciones: ",iter,sep=""), "\n")
cat("\n")

print(round(IC,digits=3))

cat("\n")

#####
#Grafico de barras de HHI#
#####

Dif.HHI <- HHI - HHI.ideal
data.graf <- data.frame(Observacion=c(1:n.c,1:n.c),
                        Tipo=c(replicate(n.c,"HHIideal"),
                               replicate(n.c,"HHI")),
                        Valor=c(HHI.ideal,Dif.HHI))
data.graf$Observacion <- factor(data.graf$Observacion,
                                levels=1:n.c,
                                labels=colnames(datos))

ggplot(data=data.graf,aes(x=Observacion,y=Valor,fill=Tipo)) +
  geom_bar(stat="identity") +
  theme(plot.title=element_text(face="bold.italic",
                                size="16"),
        legend.position="bottom",
        legend.background=element_rect(color="white")) +
  scale_fill_hue(name="") + ggtitle("HHI total e ideal") +
  ylab("") + xlab("")

}

```

1.3. Función RI

```
RI = function (datos, umbral_alto = 0.25, umbral_bajo = 0.15,
  conf=0.95, err=0.05, iter=500) {
```

```
#####
#Definicion de variables#
#####
```

```
if (any(is.na(datos)) | any(datos<0)) {
  stop("Datos ingresados son inválidos")}
datos <- as.matrix(datos)
n.c <- ncol(datos)
n.r <- nrow(datos)
if (length(colnames(datos)) == 0) {
  colnames(datos) <- seq(1:n.c)}
N <- c()
HTI_indiv <- matrix(0,nrow=n.r,ncol=n.c)
RI <- c()
Nivel <- c()
RIsup <- c()
RIinf <- c()
library(ggplot2)
```

```
#####
#Calculo de cuota#
#####
```

```
part <- scale(datos,center=seq(0,0,len=n.c),
  scale=colSums(datos))
```

```
#####
#Calculo de indice#
#####
```

```
#-----
#Operadores Activos
#-----
```

```
for (j in 1:n.c) {
  x <- datos[,j]
  N <- c(N,length(x[x>0]))
}
```

```
#-----
#Indicador Base
#-----
```

```

rank <- 1:n.r
for (j in 1:n.c){
part.ord <- sort(part[,j],decreasing=T)
HTI_indiv[,j] <- part.ord*rank
x <- sort(c(1,1-cumsum(part.ord)))
x <- x[x>0]
curva <- splinefun(seq(0,1,len=(N[j]+1)),c(0,x),
                    method="monoH.FC")
area <- integrate(curva,0,1)
RI <- c(RI,1/(2*area$value*N[j]))
}
HTI <- 1/(2*colSums(HTI_indiv)-1)

for (j in 1:n.c) {
if (HTI[j] > umbral_alto) {Nivel <- c(Nivel,2)}
else {if (HTI[j] > umbral_bajo) {Nivel <- c(Nivel,1)}
      else {Nivel <- c(Nivel,0)}
}
}

#-----
#Indicadores adicionales
#-----

HTI.ideal <- 1/N
Gini <- 1 - HTI.ideal/RI
N_e <- 1/HTI

#-----
#Intervalo de Confianza (Simulación Metropolis-Hastings)
#-----

for (j in 1:n.c){
RImod <- c()
for (it in 1:iter){
partmod <- c()
for (i in 1:n.r) {
part.pot <- part[i,j] + runif(1,-err,err)
a <- dnorm(part.pot,part[i,j],err)/dnorm(part[i,j],
                                           part[i,j],err)
if (a > 1) {partmod <- c(partmod,abs(part.pot))}
else {
if (runif(1) < a) {partmod <- c(partmod,
                                abs(part.pot))}
else {partmod <- c(partmod,part[i,j])}
}
}
}
}

```

```

partmod <- scale(partmod,center=0,scale=sum(partmod))
x <- cumsum(sort(partmod))
x <- x[x>0]
curva <- splinefun(seq(0,1,len=(length(x)+1)),c(0,x),
                    method="monoH.FC")
area <- integrate(curva,0,1)
RImod <- c(RImod,1/(2*area$value*length(x)))
}
RIsup <- c(RIsup,max(RImod))
RIinf <- c(RIinf,min(RImod))
if (RIinf[j] > RI[j]) {RIinf[j] <- RI[j]}
if (RIsup[j] < RI[j]) {RIsup[j] <- RI[j]}
}

IC <- cbind(RIinf,RI,RIsup)
rownames(IC) <- colnames(datos)
colnames(IC) <- c("Limite Inferior","Valor Estimado",
                  "Limite Superior")

#-----
#Matriz de resultados
#-----

Resultado <- t(as.matrix(cbind(N,N_e,RI,HTI,HTI.ideal,
                               Gini,Nivel)))
colnames(Resultado) <- colnames(datos)
rownames(Resultado) <- c("Operadores","Equivalente Numerico",
                        "RI","HTI","RI (HTI) Ideal",
                        "Coef. de Gini","Nivel")

#####
#Publicacion de resultados#
#####

cat("\n")
cat("-----","\n")
cat("INDICE ROSENBLUTH (HALL - TIDEMAN)","","\n")
cat("-----","\n")
cat("\n")

cat("Resumen de resultados:", "\n")
print(round(Resultado,digits=3))
cat("\n")

cat("Nivel: 2 = Alto, 1 = Moderado, 0 = Bajo","\n")
cat("\n")

```

```

cat("Intervalos de confianza del indice:", "\n")
cat(paste("Nivel de Confianza: ", conf, sep=""), "\n")
cat(paste("Error: ", err, sep=""), "\n")
cat(paste("Iteraciones: ", iter, sep=""), "\n")
cat("\n")

print(round(IC, digits=3))

cat("\n")

#####
#Curvas de Lorenz#
#####

part.ord <- sort(part[,1], decreasing=F)
part.ord <- part.ord[part.ord>0]
data.graf <- cbind(replicate(N[1]+1, 1),
                  seq(0, 1, len=N[1]+1), c(0, cumsum(part.ord)))
if (n.c > 1) {
  for (i in 2:n.c){
    part.ord <- sort(part[,i], decreasing=F)
    part.ord <- part.ord[part.ord>0]
    data.graf.caso <- cbind(replicate(N[i]+1, i),
                          seq(0, 1, len=N[i]+1),
                          c(0, cumsum(part.ord)))
    data.graf <- rbind(data.graf, data.graf.caso)
  }
}
data.graf <- data.frame(data.graf)
colnames(data.graf) <- c("Observacion", "Operador",
                        "Part.Acum")
data.graf$Observacion <- factor(data.graf$Observacion,
                              levels=1:n.c,
                              labels=colnames(datos))

lor.graf <- qplot(Operador, Part.Acum, data=data.graf,
                 ylim=c(0,1), xlim=c(0,1),
                 main="Curvas de Lorenz", xlab="% Operador",
                 ylab="% Acumulado", geom="line",
                 colour=Observacion)

lor.graf + theme(plot.title=element_text(face="bold.italic",
                                          size="16"),
                 legend.position="bottom",
                 legend.background=element_rect(color="white"))
}

```

1.4. Función CCI

```
CCI = function (datos,conf=0.95,err=0.05,iter=500) {

#####
#Definicion de variables#
#####

if (any(is.na(datos)) | any(datos<0)) {
  stop("Datos ingresados son inválidos")}
datos <- as.matrix(datos)
n.c <- ncol(datos)
n.r <- nrow(datos)
if (length(colnames(datos)) == 0) {
  colnames(datos) <- seq(1:n.c)}
N <- c()
CCI <- c()
part.max <- c()
CCIsup <- c()
CCIinf <- c()
library(ggplot2)

#####
#Calculo de cuota#
#####

part <- scale(datos,center=seq(0,0,len=n.c),
               scale=colSums(datos))

#####
#Calculo de indice#
#####

#-----
#Operadores Activos
#-----

for (j in 1:n.c) {
  x <- datos[,j]
  N <- c(N,length(x[x>0]))
}

#-----
#Indicador Base
#-----

for (j in 1:n.c){
  part.max <- c(part.max,max(part[,j]))
```

```

part.ord <- sort(part[,j],decreasing=T)
CCI <- c(CCI,part.ord[1] +
        sum(((part.ord[-1])**2)*(2-part.ord[-1])))
}

#-----
#Indicadores adicionales
#-----

CCI.ideal <- 1 + (-1 + 1/N)**3
N_e <- 1/(1 - (1-CCI)**(1/3))

#-----
#Intervalo de Confianza (Simulación Metropolis-Hastings)
#-----

for (j in 1:n.c){
  CCImod <- c()
  for (it in 1:iter){
    partmod <- c()
    for (i in 1:n.r) {
      part.pot <- part[i,j] + runif(1,-err,err)
      a <- dnorm(part.pot,part[i,j],err)/dnorm(part[i,j],
                                                part[i,j],err)
      if (a > 1) {partmod <- c(partmod,abs(part.pot))}
      else {
        if (runif(1) < a) {partmod <- c(partmod,
                                         abs(part.pot))}
      }
      else {partmod <- c(partmod,part[i,j])}
    }
  }
  partmod <- scale(partmod,center=0,scale=sum(partmod))
  partmod <- sort(partmod,decreasing=T)
  CCImod <- c(CCImod,partmod[1]+
              sum((partmod[-1]**2)*(2-partmod[-1])))
}
CCIsup <- c(CCIsup,quantile(CCImod,1-(1-conf)/2))
CCIinf <- c(CCIinf,quantile(CCImod,(1-conf)/2))
if (CCIinf[j] > CCI[j]) {CCIinf[j] <- CCI[j]}
if (CCIsup[j] < CCI[j]) {CCIsup[j] <- CCI[j]}
}

IC <- cbind(CCIinf,CCI,CCIsup)
rownames(IC) <- colnames(datos)
colnames(IC) <- c("Limite Inferior","Valor Estimado",
                  "Limite Superior")

```

```

#-----
#Matriz de resultados
#-----

Resultado <- t(as.matrix(cbind(N,N_e,CCI,CCI.ideal)))
colnames(Resultado) <- colnames(datos)
rownames(Resultado) <- c("Operadores",
                        "Equivalente Numerico","CCI",
                        "CCI Ideal")

#####
#Publicacion de resultados#
#####

cat("\n")
cat("-----", "\n")
cat("INDICE DE CONCENTRACION INDUSTRIAL COMPRENSIVO", "\n")
cat("-----", "\n")
cat("\n")

cat("Resumen de resultados:", "\n")
print(round(Resultado,digits=3))
cat("\n")

cat("Intervalos de confianza del indice:", "\n")
cat(paste("Nivel de Confianza: ",conf,sep=""), "\n")
cat(paste("Error: ",err,sep=""), "\n")
cat(paste("Iteraciones: ",iter,sep=""), "\n")
cat("\n")

print(round(IC,digits=3))

cat("\n")

#####
#Barras de CCI#
#####

data.graf <- data.frame(Observacion=c(1:n.c,1:n.c),
                      Tipo=c(replicate(n.c,"Máximo"),
                             replicate(n.c,"CCI")),
                      Valor=c(part.max,CCI))
data.graf$Observacion <- factor(data.graf$Observacion,
                              levels=1:n.c,
                              labels=colnames(datos))

ggplot(data=data.graf,aes(x=Observacion,y=Valor,fill=Tipo)) +

```



```

geom_bar(stat="identity",position=position_dodge(),
         colour="black") +
theme(plot.title=element_text(face="bold.italic",
                              size="16"),
      legend.position="bottom",
      legend.background=element_rect(color="white")) +
scale_fill_hue(name="") +
ggtitle("CCI total y Part. Maxima") +
ylab("") + xlab("")
}

```

1.5. Función HKI

```

HKI = function (datos,alfa = 2,conf=0.95,err=0.05,iter=500){

#####
#Definicion de variables#
#####

if (any(is.na(datos)) | any(datos<0)) {
  stop("Datos ingresados son inválidos")}
if (alfa <= 0) {alfa <- 1}
datos <- as.matrix(datos)
n.c <- ncol(datos)
n.r <- nrow(datos)
if (length(colnames(datos)) == 0) {
  colnames(datos) <- seq(1:n.c)}
N <- c()
HKI <- c()
limsup <- c()
val.alfa <- seq(0,2*alfa,len=25)
HKI.alfa <- matrix(0,ncol=n.c,nrow=length(val.alfa))
HKIsup <- c()
HKIinf <- c()
library(ggplot2)

#####
#Calculo de cuota#
#####

part <- scale(datos,center=seq(0,0,len=n.c),
              scale=colSums(datos))

#####
#Calculo de indice#
#####

```

```

#-----
#Operadores Activos
#-----

for (j in 1:n.c) {
x <- datos[,j]
N <- c(N,length(x[x>0]))
}

#-----
#Indicador Base
#-----

if (alfa == 1){HKI <- exp(colSums(log(part**part)))}
else {
if (alfa <= 100){HKI <-
                    (colSums(part**alfa))*(1/(alfa-1))}
else {for (j in 1:n.c) {HKI <- c(HKI,max(part[,j]))}}
}

#-----
#Indicadores adicionales
#-----

HKI.ideal <- 1/N
N_e <- 1/HKI
for (i in 1:n.c) {limsup <- c(limsup,max(part[,i]))}

#-----
#Intervalo de Confianza (Simulación Metropolis-Hastings)
#-----

for (j in 1:n.c){
HKImod <- c()
for (it in 1:iter){
partmod <- c()
for (i in 1:n.r) {
part.pot <- part[i,j] + runif(1,-err,err)
a <- dnorm(part.pot,part[i,j],err)/dnorm(part[i,j],
                                           part[i,j],err)
if (a > 1) {partmod <- c(partmod,abs(part.pot))}
else {
if (runif(1) < a) {partmod <- c(partmod,
                                abs(part.pot))}
else {partmod <- c(partmod,part[i,j])}
}
}
}
}

```

```

partmod <- scale(partmod,center=0,scale=sum(partmod))
partmod <- sort(partmod,decreasing=T)
if (alfa == 1) {HKImod <- c(HKImod,
                           prod(partmod**partmod))}
else {
if (alfa <=100) {HKImod <-
                 c(HKImod,
                   (sum(partmod**alfa))*(1/(alfa-1)))}
else {HKImod <- c(HKImod,max(partmod))}
}
}
HKIsup <- c(HKIsup,quantile(HKImod,1-(1-conf)/2))
HKIinf <- c(HKIinf,quantile(HKImod,(1-conf)/2))
if (HKIinf[j] > HKI[j]) {HKIinf[j] <- HKI[j]}
if (HKIsup[j] < HKI[j]) {HKIsup[j] <- HKI[j]}
}

IC <- cbind(HKIinf,HKI,HKIsup)
rownames(IC) <- colnames(datos)
colnames(IC) <- c("Limite Inferior","Valor Estimado",
                 "Limite Superior")

#-----
#Matriz de resultados
#-----

Resultado <- t(as.matrix(cbind(N,N_e,limsup,HKI,HKI.ideal)))
colnames(Resultado) <- colnames(datos)
rownames(Resultado) <- c("Operadores","Equivalente Numerico",
                        "Maximo","HKI","HKI Ideal")

#####
#Publicacion de resultados#
#####

cat("\n")
cat("-----","\n")
cat("INDICE HANNAH - KAY","\n")
cat("-----","\n")
cat("\n")

cat(paste("Alfa = ",alfa,sep=""),"\n")
cat("\n")

cat("Resumen de resultados:","\n")
print(round(Resultado,digits=3))
cat("\n")

```



```

        colour=Observacion)

alfa.graf + theme(plot.title=element_text(face="bold.italic",
                                           size="16"),
                  legend.position="bottom",
                  legend.background=element_rect(color="white"))

}

```

1.6. Función UI

```

UI = function (datos,z = 1,conf=0.95,err=0.05,iter=500) {

#####
#Definicion de variables#
#####

if (any(is.na(datos)) | any(datos<0)) {
  stop("Datos ingresados son inválidos")}
z <- max(0,z)
datos <- as.matrix(datos)
n.c <- ncol(datos)
n.r <- nrow(datos)
if (length(colnames(datos)) == 0) {
  colnames(datos) <- seq(1:n.c)}
N <- c()
UIsup <- c()
UIinf <- c()
library(ggplot2)

#####
#Calculo de cuota#
#####

part <- scale(datos,center=seq(0,0,len=n.c),
               scale=colSums(datos))

#####
#Calculo de indice#
#####

#-----
#Operadores Activos
#-----

for (j in 1:n.c) {
  x <- datos[,j]
  N <- c(N,length(x[x>0]))
}

```

```

}

#-----
#Indicador Base
#-----

media <- colMeans(part)
media2 <- colMeans(part**2)
varianza <- media2 - media**2
coefvar.sq <- (media2/(media**2))-1
UI <- ((coefvar.sq+1)**z)/max(N)

#-----
#Indicadores adicionales
#-----

UI.ideal <- 1/N
N_e <- 1/UI

#-----
#Intervalo de Confianza (Simulación Metropolis-Hastings)
#-----

for (j in 1:n.c){
  UImod <- c()
  for (it in 1:iter){
    partmod <- c()
    for (i in 1:n.r) {
      part.pot <- part[i,j] + runif(1,-err,err)
      a <- dnorm(part.pot,part[i,j],err)/dnorm(part[i,j],
                                                part[i,j],err)
      if (a > 1) {partmod <- c(partmod,abs(part.pot))}
      else {
        if (runif(1) < a) {partmod <- c(partmod,
                                         abs(part.pot))}
      }
    }
  }
  partmod <- scale(partmod,center=0,scale=sum(partmod))
  partmod <- sort(partmod,decreasing=T)
  mediamod <- mean(partmod)
  media2mod <- mean(partmod**2)
  coefvarmod.sq <- (media2mod/(mediamod**2))-1
  UImod <- c(UImod,((coefvarmod.sq+1)**z)/max(N))
}
UIsup <- c(UIsup,quantile(UImod,1-(1-conf)/2))
UIinf <- c(UIinf,quantile(UImod,(1-conf)/2))

```

```

if (UIinf[j] > UI[j]) {UIinf[j] <- UI[j]}
if (UIsup[j] < UI[j]) {UIsup[j] <- UI[j]}
}

IC <- cbind(UIinf,UI,UIsup)
rownames(IC) <- colnames(datos)
colnames(IC) <- c("Limite Inferior","Valor Estimado",
                 "Limite Superior")

#-----
#Matriz de resultados
#-----

Resultado <- t(as.matrix(cbind(N,N_e,sqrt(coefvar.sq),
                               UI,UI.ideal)))
colnames(Resultado) <- colnames(datos)
rownames(Resultado) <- c("Operadores","Equivalente Numerico",
                        "Coef. Variacion","UI","UI Ideal")

#####
#Publicacion de resultados#
#####

cat("\n")
cat("-----","\n")
cat("INDICE DE CONCENTRACION U","\n")
cat("-----","\n")
cat("\n")

cat(paste("Zeta = ",z,sep=""),"\n")
cat("\n")

cat("Resumen de resultados:", "\n")
print(round(Resultado,digits=3))
cat("\n")

cat("Intervalos de confianza del indice:", "\n")
cat(paste("Nivel de Confianza: ",conf,sep=""), "\n")
cat(paste("Error: ",err,sep=""), "\n")
cat(paste("Iteraciones: ",iter,sep=""), "\n")
cat("\n")

print(round(IC,digits=3))

cat("\n")

#####

```

```

#Curvas de Isoconcentracion#
#####

val.N <- seq(0,3*max(N),len=100)
sigma.N <- matrix(0,ncol=n.c,nrow=length(val.N))

for (j in 1:n.c) {
  for (i in 1:length(val.N)) {
    sigma.N[i,j] = ((val.N[i]*UI[j])**((1/z)-1)/(val.N[i]**2)
  }
}

data.graf <- cbind(replicate(length(val.N),1),
                  val.N,sigma.N[,1])
if (n.c > 1) {
  for (i in 2:n.c){
    data.graf.caso <- cbind(replicate(length(val.N),i),
                          val.N,sigma.N[,i])
    data.graf <- rbind(data.graf,data.graf.caso)
  }
}
data.graf <- data.frame(data.graf)
colnames(data.graf) <- c("Observacion","Operadores","Varianza")
data.graf$Observacion <- factor(data.graf$Observacion,
                              levels=1:n.c,
                              labels=colnames(datos))

iso.graf <- qqplot(Operadores,Varianza,data=data.graf,
                  xlim=c(0,max(data.graf$Operadores)),
                  ylim=c(0,max(data.graf$Varianza)),
                  main="Curvas Iso-Concentracion",
                  xlab="Operadores",ylab="Varianza",
                  geom="line",colour=Observacion)

iso.graf + theme(plot.title=element_text(face="bold.italic",
                                          size="16"),
                 legend.position="bottom",
                 legend.background=element_rect(color="white"))

}

```

1.7. Función Hause

```

Hause = function(datos,alfa = 0.15,beta = 1, mult = TRUE,
conf=0.95,err=0.05,iter=500){

```

```

#####

```



```

#Definicion de variables#
#####

if (any(is.na(datos)) | any(datos<0)) {
  stop("Datos ingresados son inválidos")}
alfa <- max(0,alfa)
beta <- max(0,beta)
datos <- as.matrix(datos)
n.c <- ncol(datos)
n.r <- nrow(datos)
if (length(colnames(datos)) == 0) {
  colnames(datos) <- seq(1:n.c)}
N <- c()
H_indiv <- matrix(0,ncol=n.c,nrow=n.r)
N_e <- c()
Hsup <- c()
Hinf <- c()
library(rootSolve)

#####
#Calculo de cuota#
#####

part <- scale(datos,center=seq(0,0,len=n.c),
               scale=colSums(datos))

#####
#Calculo de indice#
#####

#-----
#Operadores Activos
#-----

for (j in 1:n.c) {
  x <- datos[,j]
  N <- c(N,length(x[x>0]))
}

#-----
#Indicador Base
#-----

HHI <- colSums(part**2)

if (mult == TRUE) {
  for (i in 1:n.r) {

```

```

for (j in 1:n.c) {
  H_indiv[i,j] <-
    part[i,j]**(2-(part[i,j]*
      (HHI[j]-
        part[i,j]**2))**alfa)
}
}
H.ideal <- (1/N)**(1-((N-1)/N**3)**alfa)
tipo <- "Multiplicativo"
}
else {
  for (i in 1:n.r) {
    for (j in 1:n.c){
      H_indiv[i,j] <-
        (part[i,j]**2) +
        (part[i,j]*(HHI[j]-part[i,j]**2))**beta
    }
  }
  H.ideal <- (1/N)+(N**(1-2*beta))*(((N-1)/N)**beta)
  tipo <- "Aditivo"
}

H <- colSums(H_indiv)

#-----
#Indicadores adicionales
#-----

if (mult == TRUE) {
  for (j in 1:n.c) {
    func.N_e <- function (x) {
      (1/x)**(1-((x-1)/x**3)**alfa)-H[j]}
    x_cero <- multiroot(f=func.N_e,start=N[j])
    N_e <- c(N_e,x_cero$root)
  }
}
else {
  for (j in 1:n.c) {
    func.N_e <- function (x) {
      (1/x)+(x**(1-2*beta))*(((x-1)/x)**beta)-H[j]}
    x_cero <- multiroot(f=func.N_e,start=N[j])
    N_e <- c(N_e,x_cero$root)
  }
}

#-----
#Intervalo de Confianza (Simulación Metropolis-Hastings)

```

```

#-----

for (j in 1:n.c){
  Hmod <- c()
  for (it in 1:iter){
    partmod <- c()
    for (i in 1:n.r) {
      part.pot <- part[i,j] + runif(1,-err,err)
      a <- dnorm(part.pot,part[i,j],err)/dnorm(part[i,j],
                                                part[i,j],err)
      if (a > 1) {partmod <- c(partmod,abs(part.pot))}
      else {
        if (runif(1) < a) {partmod <- c(partmod,
                                         abs(part.pot))}
      else {partmod <- c(partmod,part[i,j])}
      }
    }
    partmod <- scale(partmod,center=0,scale=sum(partmod))
    partmod <- sort(partmod,decreasing=T)
    HHImod <- sum(partmod**2)
    if (mult == TRUE) {
      Hmod <- c(Hmod,
                sum(partmod**(2-(partmod*
                                (HHImod-
                                partmod**2))**alfa)))
    }
    else {
      Hmod <- c(Hmod,sum((partmod**2) +
                        (partmod*(HHImod-
                                partmod**2))**beta))
    }
  }
}

Hsup <- c(Hsup,quantile(Hmod,1-(1-conf)/2))
Hinf <- c(Hinf,quantile(Hmod,(1-conf)/2))
if (Hinf[j] > H[j]) {Hinf[j] <- H[j]}
if (Hsup[j] < H[j]) {Hsup[j] <- H[j]}
}

IC <- cbind(Hinf,H,Hsup)
rownames(IC) <- colnames(datos)
colnames(IC) <- c("Limite Inferior","Valor Estimado",
                  "Limite Superior")

#-----
#Matriz de resultados
#-----

```

```

Resultado <- t(as.matrix(cbind(N,N_e,H,H.ideal)))
colnames(Resultado) <- colnames(datos)
rownames(Resultado) <- c("Operadores","Equivalente Numerico",
                        paste("H",tipo,sep=" "), "H Ideal")

#####
#Publicacion de resultados#
#####

cat("\n")
cat("-----", "\n")
cat("INDICE HAUSE", "\n")
cat("-----", "\n")
cat("\n")

if (mult == TRUE) {cat(paste("Alfa = ",alfa,sep=""), "\n")}
else {cat(paste("Beta = ",beta,sep=""), "\n")}
cat("\n")

cat("Resumen de resultados:", "\n")
print(round(Resultado,digits=3))
cat("\n")

cat("Intervalos de confianza del indice:", "\n")
cat(paste("Nivel de Confianza: ",conf,sep=""), "\n")
cat(paste("Error: ",err,sep=""), "\n")
cat(paste("Iteraciones: ",iter,sep=""), "\n")
cat("\n")

print(round(IC,digits=3))

cat("\n")

}

```

2. Codificación en Netlogo para modelo EMD

A continuación se presenta la codificación en Netlogo para la implementación del modelo EMD desarrollado en la sección 3 de este documento. Considerando que Netlogo requiere de un entorno visual para la ejecución de la simulación, se hace necesario mostrar la interfaz utilizada, así como los algoritmos generados tanto en los monitores y gráficos de resultados, como en la codificación general del programa.

2.1. Interfaz

Figura 17: Interfaz de parámetros para modelo EMD

PARTICIPACIONES DE MERCADO

INICIAR

PARÁMETROS GENERALES:

Número de iteraciones:

B
10 iteraciones

Número de pasos del autómata:

T
300 pasos

Probabilidad a priori para desviarse en el modelo:

prob-priori
2.6 %

Función para estimar probabilidad de desviación:

funcion-desv
Racional ▼

Nivel de confianza (%):

conf
80 ▼

PARÁMETROS ESPECÍFICOS:

Número de operadores:

N
8 operadores

Proporción de costos fijos en volumen del líder:

F
22 % de volumen

Elasticidad absoluta precio de demanda:

Elasticidad
0.5

Grado de heterogeneidad en costos:

h
1.1 desv. estandar

Existencia de desviación inicial:

On
desv-inicial?

Figura 18: Interfaz de resultados para modelo EMD

RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN:

Configuración por Participación de Operadores 0	Herfindahl Hirschman 0	
Incremento aproximado en Precios (%) N/A	Reducción aproximada en Oferta (%) N/A	
Promedio Operadores Desviados Gráfico: Número vs T (0 a 10). Eje Y: 0, 5.	Hist. Operadores Desviados Gráfico: Frecuencia vs Operadores (0 a 10). Eje Y: 0, 10.	Promedio Operadores Desviados N/A Límite Superior N/A Límite Inferior N/A
Persistencia de Desviaciones N/A	Prob. Efectiva Desviación (%) N/A	
Promedio Participación Conjunta Gráfico: Afectación vs (0 a 100). Eje Y: 0, 100.	Hist. Participación Conjunta Gráfico: Frecuencia vs (0 a 10). Eje Y: 0, 10.	Promedio Part. Conjunta (%) N/A Límite Superior N/A Límite inferior N/A

2.2. Codificación de Resultados

Configuración por Participación de Operadores

S

Herfindahl Hirschman

$$hhi / 10000$$

Incremento Aproximado en Precios

$$(\text{mean lista-Sn}) / (\text{Elasticidad} * (\text{mean lista-nop} + 1))$$

Reducción Aproximada en Oferta

$$(\text{mean lista-Sn}) / (\text{mean lista-nop} + 1)$$

Operadores Desviados

Valor promedio

$$\text{mean lista-nop}$$

Intervalo de confianza

Límite Superior:

```

item (floor ((1 - (100 - conf) / 200) * (ticks + 1))) (sort lista-nop) +
((1 - (100 - conf) / 200) * (ticks + 1) - floor ((1 - (100 - conf) / 200)
* (ticks + 1))) * (item (floor ((1 - (100 - conf) / 200) * (ticks + 1) +
1)) (sort lista-nop) - item (floor ((1 - (100 - conf) / 200) * (ticks + 1)))
(sort lista-nop))

```

Límite Inferior:

```

min (list (mean lista-nop)(item (floor (((100 - conf) / 200) * (ticks + 1)))
(sort lista-nop) + (((100 - conf) / 200) * (ticks + 1) - floor (((100 - conf)
/ 200) * (ticks + 1))) * (item (floor (((100 - conf) / 200) * (ticks + 1)
+ 1)) (sort lista-nop) - item (floor (((100 - conf) / 200) * (ticks + 1)))
(sort lista-nop))))

```

Gráfica de de evolución promedio

do-plot-opdesv

Histograma

do-hist-opdesv

Persistencia de Desviaciones

mean pers-desv / T

Probabilidad Efectiva de Desviación

mean (max-prob-efect-desv) * 100 / T

Participación Conjunta

Valor promedio

mean lista-Sn

Intervalo de confianza

Límite Superior:

```

item (floor ((1 - (100 - conf) / 200) * (length lista-Sn + 1))) (sort lista-Sn)
+ ((1 - (100 - conf) / 200) * (length lista-Sn + 1) - floor ((1 - (100 -
conf) / 200) * (length lista-Sn + 1))) * (item (floor ((1 - (100 - conf)
/ 200) * (length lista-Sn + 1) + 1)) (sort lista-Sn) - item (floor ((1 -
(100 - conf) / 200) * (length lista-Sn + 1))) (sort lista-Sn))

```

Límite Inferior:

```

min (list (mean lista-Sn)(item (floor (((100 - conf) / 200) * (length lista-Sn
+ 1))) (sort lista-Sn) + (((100 - conf) / 200) * (length lista-Sn + 1) -
floor (((100 - conf) / 200) * (length lista-Sn + 1))) * (item (floor (((100
- conf) / 200) * (length lista-Sn + 1) + 1)) (sort lista-Sn) - item (floor
(((100 - conf) / 200) * (length lista-Sn + 1))) (sort lista-Sn))))

```

Gráfica de de evolución promedio

do-plot-Sn

Histograma

do-hist-Sn

2.3. Codificación General

```
;; Variables globales del modelo ;;  
globals [  
    fila  
    contN  
    S  
    Sn  
    lista-Sn  
    alfa  
    nop  
    lista-nop  
    factorF  
    prob-desvF  
    cmg-prom  
    prob-desvV  
    prob-efect-desv  
    max-prob-efect-desv  
    pers-desv  
    iter  
    pos_dom  
    part_max  
    hhi  
]  
  
;; Variables específicas de los operadores ;;  
  
patches-own [  
    izq  
    der  
    lid  
    part  
    cmg  
    pers-caso  
    prob-desv-caso  
]  
  
;; Configuración (Participaciones de Mercado) ;;
```

```
to setup
```



```

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;; Definición de parámetros iniciales ;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

ca
if (Elasticidad <= 0) [
  user-message "Se requiere una elasticidad mayor a 0"
  stop
  ca
]
resize-world 0 (N - 1) 0 (T - 1)
set-patch-size round (180 / N)
set iter 0
set lista-nop (list 0)
set pers-desv (list 0)
set prob-effect-desv 0
set max-prob-effect-desv (list 0)
set lista-Sn (list 0)
condiciones-iniciales
reset-ticks

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;; Definición de variables ;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

set S (list read-from-string user-input
"Participacion (/100) Empresa 1")
set hhi ((item 0 S) ^ 2)
ask patches with [pycor = min-pycor] [
  if pxcor = 0 [
    set part (item 0 S)
    set cmg (random-normal 0 h)
  ]
]
set contN 2
repeat (N - 1)
[
  set S lput (read-from-string user-input
(word "Participación (/100) Empresa " contN)) S
  set hhi (hhi + (item (contN - 1) S) ^ 2)
  ask patches with [pycor = min-pycor] [
    if pxcor = (contN - 1) [
      set part (item (contN - 1) S)
      set cmg (random-normal 0 h)
    ]
  ]
]
set contN (contN + 1)

```

```

]
if sum S != 100
[
  user-message "Participaciones invalidas"
  stop
  ca
]

ifelse (hhi > 150 * mean S) [set pos_dom 1] [set pos_dom 0]
set part_max max S
end

;;;;;;;;;;;;;
;; Comandos del botón Iniciar ;;
;;;;;;;;;;;;;

to go

;;;;;;;;;;;;;
;; Iteración del autómata ;;
;;;;;;;;;;;;;

if fila = max-pycor [
  set iter (iter + 1)
  ifelse iter = B [
    set iter 0
    stop
  ]
  [

    ;;;;;;;;;;;;;;
    ;; Redefinición de variables ;;
    ;;;;;;;;;;;;;;

    set pers-desv lput
    (max [pers-caso] of patches) pers-desv
    condiciones-iniciales
    set S shuffle S
    set contN 0
    repeat N [
      ask patches with [pycor = min-pycor] [
        if pxcor = contN [
          set part (item contN S)
          set cmg (random-normal 0 h)
        ]
      ]
      set contN (contN + 1)
    ]
  ]
]

```

```
]
set max-prob-efect-desv
lput prob-efect-desv max-prob-efect-desv
]
]
```

;; Procesamiento del autómata ;;

```
set Sn 0
set cmg-prom (mean [cmg] of patches with [pycor = fila])
ask patches with [pycor = fila] [regla-desv]
ask patches with [pycor = fila]
[if pcolor = white [set pcolor red]]
;; operadores con color rojo y blanco están desviados
set prob-efect-desv (mean [prob-desv-caso]
of patches with [pycor = fila])
set fila (fila + 1)
if (Sn > 0) [set lista-Sn lput Sn lista-Sn]
desviaciones
set alfa
((Sn / 100) / (nop + 1)) / (1 - (Sn / 100) / (nop + 1))
set factorF
(alfa ^ 2) / (Elasticidad * (F / 100) * (max(S) / 100))
ifelse (alfa = 0) [set prob-desvF prob-priori]
[
  if funcion-desv = "Logistica"
    [set prob-desvF 100 / (1 + exp(1 - factorF))]
  if funcion-desv = "Racional"
    [set prob-desvF 50 + 100 * (factorF - 1)
      / (2 * sqrt(1 + (factorF - 1) ^ 2))]
  if funcion-desv = "Normal"
    [set prob-desvF 50 * erf ((factorF - 1) / (sqrt 2))]
]
tick
end
```

;; Procedimientos adicionales ;;

;; Condiciones Iniciales de los Operadores ;;

```
to condiciones-iniciales
```

```

set fila min-pycor
set prob-desvF prob-priori
desviaciones
set alfa 0
ask patches [set pcolor green]
if desv-inicial? [ask patches with [pycor = min-pycor]
[set pcolor one-of (list white green)]]
ask patches [set pers-caso 0]
ask patches [set prob-desv-caso 0]
end

```

```

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;; Reglas de Desviación (Ciclo de Edgeworth) ;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

```

```

to regla-desv

```

```

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;; Parámetros por operador ;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

```

```

set izq [pcolor] of patch-at -1 0
set der [pcolor] of patch-at 1 0
set lid [pcolor] of patches with
[part = part_max and pycor = fila]
if funcion-desv = "Logistica"
[set prob-desvV 100 / (1 + exp(cmg - cmg-prom))]
if funcion-desv = "Racional"
[set prob-desvV 50 + 100 * (cmg-prom - cmg) /
(2 * sqrt(1 + (cmg-prom - cmg) ^ 2))]
if funcion-desv = "Normal"
[
  ifelse h = 0
  [
    set prob-desvV
    50 * erf ((cmg-prom - cmg) / (sqrt 2))
  ]
  [
    set prob-desvV
    50 * erf ((cmg-prom - cmg) / (h * sqrt 2))
  ]
]

```

```

if (pos_dom = 1) [
  ifelse (lid = green) [
    ifelse (izq = white or der = white)
    [

```

```

ifelse ((part > (mean list
(item ([pxcor] of patch-at -1 0) S)
(item ([pxcor] of patch-at 1 0) S))) or
  (cmg <= (mean list
  ([cmg] of patch-at -1 0)
  ([cmg] of patch-at 1 0))))
[
  ifelse (random-float 100 < prob-desvF)
  [
    ask patch-at 0 1 [set pcolor white]
    ask patch-at 0 1 [set part
      ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1 [set cmg
      ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1 [set pers-caso
      ([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso pers-caso + 1]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
      ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
    set Sn Sn + part
  ]
  [
    ask patch-at 0 1 [set pcolor green]
    ask patch-at 0 1 [set part
      ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1 [set cmg
      ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1 [set prob-desv-caso
      ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
  ]
]
[
  ifelse (random-float 100 < prob-priori)
  [
    ask patch-at 0 1 [set pcolor white]
    ask patch-at 0 1 [set part
      ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1 [set cmg
      ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso
      ([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
  ]
]

```

```

    [set pers-caso pers-caso + 1]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
    set Sn Sn + part
  ]
  [
    ask patch-at 0 1 [set pcolor green]
    ask patch-at 0 1
    [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
  ]
]
[
  ask patch-at 0 1
  [set pcolor green]
  ask patch-at 0 1
  [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
  ask patch-at 0 1
  [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
  ask patch-at 0 1
  [set prob-desv-caso
  ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
]
[
  ifelse ((part > (mean list
  (item ([pxcor] of patch-at -1 0) S)
  (item ([pxcor] of patch-at 1 0) S))) or
  (cmg <= (mean list
  ([cmg] of patch-at -1 0)
  ([cmg] of patch-at 1 0))))
  [
    ifelse (random-float 100 < prob-desvF)
    [
      ask patch-at 0 1
      [set pcolor white]
      ask patch-at 0 1
      [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
      ask patch-at 0 1
    ]
  ]
]

```

```

    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso
    ([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso pers-caso + 1]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
    set Sn Sn + part
  ]
  [
    ask patch-at 0 1
    [set pcolor green]
    ask patch-at 0 1
    [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
  ]
]
[
  ifelse (random-float 100 < prob-priori)
  [
    ask patch-at 0 1
    [set pcolor white]
    ask patch-at 0 1
    [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso
    ([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso pers-caso + 1]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
    set Sn Sn + part
  ]
  [

```

```

ask patch-at 0 1
[set pcolor green]
ask patch-at 0 1
[set part ([part] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set prob-desv-caso
([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
]
]
]
]

if (pos_dom = 0)
[
if (izq = green and der = green)
[
ifelse ((part > (mean S)) or
(random-float 50 <= prob-desvV))
[
ifelse (random-float 100 <
prob-desvF)
[
ask patch-at 0 1
[set pcolor white]
ask patch-at 0 1
[set part ([part] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set pers-caso
([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set pers-caso pers-caso + 1]
ask patch-at 0 1
[set prob-desv-caso
([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
set Sn Sn + part
]
[
ask patch-at 0 1
[set pcolor green]
ask patch-at 0 1
[set part ([part] of patch-at 0 -1)]

```



```

ask patch-at 0 1
[set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set prob-desv-caso
([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
]
]
[
ifelse (random-float 100 < prob-priori)
[
ask patch-at 0 1
[set pcolor white]
ask patch-at 0 1
[set part ([part] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set pers-caso
([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set pers-caso pers-caso + 1]
ask patch-at 0 1
[set prob-desv-caso
([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
set Sn Sn + part
]
[
ask patch-at 0 1
[set pcolor green]
ask patch-at 0 1
[set part ([part] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
ask patch-at 0 1
[set prob-desv-caso
([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
]
]
]
if (izq = white or der = white)
[
ifelse ((part > (mean list
(item ([pxcor] of patch-at -1 0) S)
(item ([pxcor] of patch-at 1 0) S))) or
(cmg <= (mean list

```

```

([cmg] of patch-at -1 0)
([cmg] of patch-at 1 0))))
[
  ifelse (random-float 100 < prob-desvF)
  [
    ask patch-at 0 1
    [set pcolor white]
    ask patch-at 0 1
    [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso
    ([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso pers-caso + 1]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
    set Sn Sn + part
  ]
  [
    ask patch-at 0 1
    [set pcolor green]
    ask patch-at 0 1
    [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
  ]
]
[
  ifelse (random-float 100 < prob-priori)
  [
    ask patch-at 0 1
    [set pcolor white]
    ask patch-at 0 1
    [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set pers-caso ([pers-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
  ]

```

```

    [set pers-caso pers-caso + 1]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso prob-desv-caso + 1]
    set Sn Sn + part
  ]
  [
    ask patch-at 0 1
    [set pcolor green]
    ask patch-at 0 1
    [set part ([part] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set cmg ([cmg] of patch-at 0 -1)]
    ask patch-at 0 1
    [set prob-desv-caso
    ([prob-desv-caso] of patch-at 0 -1)]
  ]
]
]
end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;; Conteo de Desviaciones ;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to desviaciones
  set nop count patches with [pcolor = white]
  set lista-nop lput nop lista-nop
end

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;; Función de Error ;;
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

to-report erf [x]
  let z abs x
  let t.e 1 / (1 + 0.5 * z)
  let r t.e * exp ( - (z ^ 2) - 1.26551223 + t.e *
    (1.00002368 + t.e * (0.37409196 + t.e *
    (0.09678418 + t.e * (-0.18628806 + t.e * (.27886807 +
      t.e * (-1.13520398 + t.e * (1.48851587 + t.e *
      (-0.82215223 + t.e * .17087277 ))))))))
  ifelse (x >= 0) [ report 2 - r ] [report r]
end

```

```

;;;;;;;;;;;;;;
;; Gráficas ;;
;;;;;;;;;;;;;;

to do-plot-opdesv
  set-plot-x-range 0 (T * B)
  set-plot-y-range 0 N
  plot mean lista-nop
end

to do-hist-opdesv
  set-plot-x-range 0 (N + 1)
  set-plot-pen-mode 1
  histogram lista-nop
end

to do-hist-Sn
  set-plot-x-range 0 101
  set-plot-pen-mode 1
  histogram lista-Sn
end

to do-plot-Sn
  set-plot-x-range 0 (T * B)
  set-plot-y-range 0 100
  plot mean lista-Sn
end

```